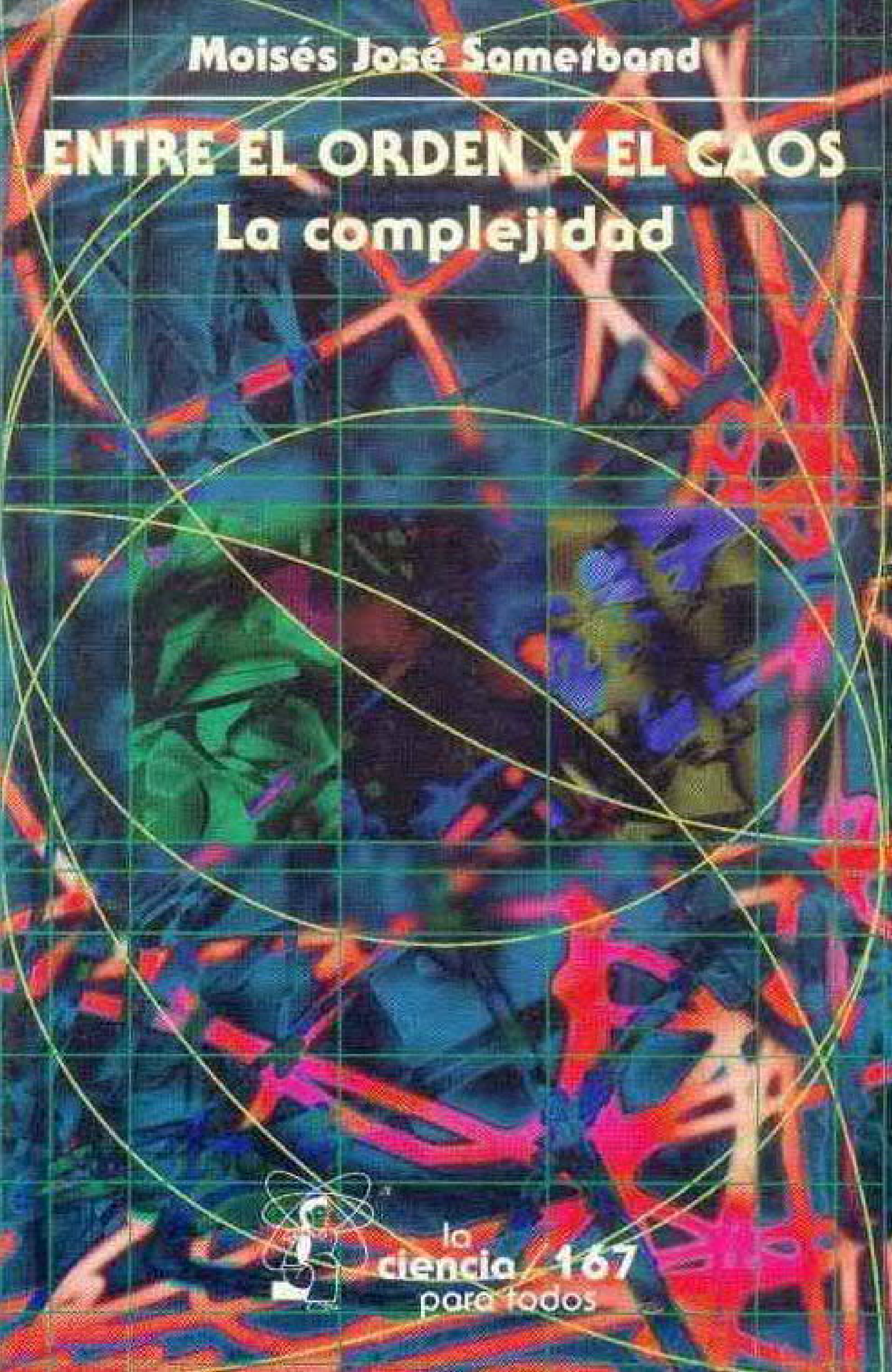


Moisés José Sametband
ENTRE EL ORDEN Y EL CAOS
La complejidad
la
ciencia 167
para todos

La Ciencia para Todos

La colección La Ciencia desde México, del Fondo de Cultura Económica, llevó, a partir de su nacimiento en 1986, un ritmo siempre ascendente que superó las aspiraciones de las personas e instituciones que la hicieron posible: nunca faltó material, y los científicos mexicanos desarrollaron una notable labor en un campo nuevo para ellos, escribir de modo que los temas más complejos e inaccesibles pudieran ser entendidos por los jóvenes estudiantes y los lectores sin formación científica.

Tras diez años de trabajo fructífero se ha pensado ahora dar un paso adelante, extender el enfoque de la colección a los creadores de la ciencia que se hace y piensa en lengua española.

Del Río Bravo al Cabo de Hornos y, cruzando el océano, hasta la Península Ibérica, se encuentra en marcha un ejército compuesto de un vasto número de investigadores, científicos y técnicos, que desempeñan su labor en todos los campos de la ciencia moderna, una disciplina tan revolucionaria que ha cambiado en corto tiempo nuestra forma de pensar y observar todo lo que nos rodea.

Se trata ahora no sólo de extender el campo de acción de una colección, sino de pensar una ciencia en nuestro idioma que, imaginamos, tendrá siempre en cuenta al hombre, sin deshumanizarse.

Esta nueva colección tiene como fin principal poner el pensamiento científico en manos de los jóvenes que, siguiendo a Rubén Darío, aún hablan en español. A ellos tocará, al llegar su turno, crear una ciencia que, sin desdeñar a ninguna otra, lleve la impronta de nuestros pueblos.

ENTRE EL ORDEN Y EL CAOS:
La complejidad

Comité de Selección

Dr. Antonio Alonso
Dr. Francisco Bolívar Zapata
Dr. Javier Bracho
Dr. Gerardo Cabañas
Dr. Jorge Flores Valdés
Dr. Juan Ramón de la Fuente
Dr. Leopoldo García-Colín Scherer
Dr. Tomás Garza
Dr. Gonzalo Halffter
Dr. Jaime Martuscelli
Dr. Héctor Nava Jaimes
Dr. Manuel Peimbert
Dr. Julio Rubio Oca
Dr. José Sarukhán
Dr. Guillermo Soberón

Coordinadora:

María del Carmen Farías

Moisés José Sametband

ENTRE EL ORDEN Y EL CAOS:

La complejidad



Primera edición (Breviarios de Ciencia Contemporánea), 1994
Segunda edición (La Ciencia para Todos), 1999



ISBN 950-557-207-7 (primera edición)
ISBN 968-16-6051-X (segunda edición)

Impreso en México

INTRODUCCIÓN

Han pasado tres décadas desde que se inició una nueva línea de investigación científica llamada "teoría del caos".

A diferencia de lo que ocurre en otros campos de la física, como la mecánica cuántica, las investigaciones sobre las partículas fundamentales que constituyen la materia o las teorías sobre el origen del Universo, se está intentando aplicar esta "ciencia del caos" a muchos eventos vinculados directamente con la experiencia humana habitual, y explicar así fenómenos tan disímiles como las arritmias en el funcionamiento del corazón, o aspectos de la economía como las fluctuaciones de la bolsa de valores, o también la aparición de la vida sobre la Tierra, además del comportamiento de los sistemas físicos dinámicos con un número elevado de componentes como pueden ser la atmósfera o un líquido en estado turbulento.

El físico Joseph Ford, proclamó en un artículo del libro *The New Physics* la nueva ciencia del caos como "el comienzo de la tercera revolución de la física del presente siglo", siendo las dos anteriores la teoría de la relatividad y la teoría cuántica.

Parece aún prematuro, sin embargo, darle la categoría de tercera revolución de la física, ya que a diferencia de los otros dos casos no es correcto hablar de una "teoría del caos", teoría que aún no existe. Se trata de una nueva y muy promisoria manera de aplicar las leyes conocidas de la física, con la ayuda fundamental de la computadora, a fenómenos muy variados que abarcan, además de los tradicionales en física, a los que se presentan en las ciencias biológicas y las ciencias sociales, siempre y cuando se les pueda encarar como si se tratara de sistemas dinámicos complejos.

En la física se está trabajando con intensidad creciente en

los temas de medios desordenados y de sus propiedades específicas, de gran interés científico y tecnológico.

Pero hay que evitar las confusiones que se pueden generar alrededor de este tema, en particular, por las expectativas que puede despertar el estudio del caos en los que trabajan en otros campos del conocimiento.

En realidad aparece aquí un problema de interpretación: entre quienes no están familiarizados con las ciencias físicas o matemáticas —y debido en parte a las declaraciones de algunos científicos— se ha instalado una especie de mitología del Caos o Desorden, que asigna un significado trascendente al azar (real o aparente) de la naturaleza, y que proclama la muerte definitiva del determinismo, cuando todo indica que para los sistemas caóticos sigue siendo válido el determinismo, si bien se requiere una descripción probabilística de su comportamiento.

De manera similar a lo que ocurrió con la teoría de las catástrofes desarrollada por René Thom —que fue un primer intento de estudiar matemáticamente ciertos fenómenos complejos— hay quienes esperan que el estudio del caos permita desentrañar los misterios de las grandes transformaciones sociales o de la relación entre las redes neuronales y la psicología, y también ha desencadenado formidables especulaciones sobre el significado del tiempo y del desorden en el Universo.

Por supuesto que es muy beneficiosa la extensión de los descubrimientos realizados en un campo del conocimiento a otras áreas, pero cuando se trata, por ejemplo, del comportamiento humano, individual o colectivo, que tiene una complejidad incomparablemente mayor que la de los sistemas físicos, esa extensión debe hacerse con mucha prudencia, y en general sólo puede tener un carácter de analogía.

Así, puede resultar fructífero encarar la psicología de un grupo familiar aplicando ciertas pautas que tienen analogías con las de sistemas dinámicos físicos, pero difícilmente pueda trabajarse en este tema aplicando la matemática del caos, y buscando dimensiones fractales y atractores extraños.

Debería evitarse la utilización de un lenguaje que parezca atribuir un alcance mágico al "caos": en los textos científicos, este concepto tiene un sentido preciso, que nos remite a fenó-

menos complejos, particularmente difíciles de formular matemáticamente, pero que no manifiestan, en principio, relación alguna con el Caos primordial concebido por las antiguas mitologías.

Es importante dejar en claro que las leyes fundamentales de la física siguen rigiendo y que el hecho de que se utilicen, como veremos, las características estadísticas para predecir comportamientos no es un "drama epistemológico" como algunos han sugerido.

La fuerte carga emocional que tiene la palabra caos es en parte la causante de las confusiones antes mencionadas, y ha contribuido a ello el hecho de que aún no está definitivamente establecido el nombre de esta nueva disciplina.

Hace treinta años, cuando comenzó a desarrollarse, se hablaba de la "ciencia del caos", que pronto pasó a denominarse "caos determinista", para diferenciarlo del caos producto del puro azar. Actualmente tiende a afianzarse la palabra "complejidad", que designa el estudio de los sistemas dinámicos que están en algún punto intermedio entre el orden en el que nada cambia, como puede ser el de las estructuras cristalinas, y el estado de total desorden o caos como puede ser el de un gas ideal en equilibrio termodinámico.

Los fenómenos de "caos determinista" o de "complejidad" se refieren a muchos sistemas que existen en la naturaleza cuyo comportamiento va cambiando con el transcurrir del tiempo (sistemas dinámicos). Dichos fenómenos aparecen cuando los sistemas se hacen extremadamente sensibles a sus condiciones iniciales de posición, velocidad, etcétera, de modo que alteraciones muy pequeñas en sus causas son capaces de provocar grandes diferencias en los efectos. Como consecuencia de ello no es posible predecir con exactitud cómo se comportarán dichos sistemas más allá de cierto tiempo, por lo que parecen no seguir ninguna ley, cual si estuviesen regidos por el azar.

Pero los investigadores han encontrado que los sistemas dinámicos en estas condiciones presentan pautas de regularidad colectiva aunque no sea posible distinguir el comportamiento individual de cada uno de sus componentes.

Se ha comprobado que hay ciertas características comunes que permiten incluir en el estudio de procesos complejos no

sólo los sistemas físcos y químicos inertes sino también organismos vivos, abordados todos mediante herramientas matemáticas comunes. La herramienta fundamental es, por supuesto, la computadora, sin la cual hubiera sido imposible desarrollar este nuevo enfoque de los sistemas dinámicos. De manera similar al impulso que dio a la ciencia la utilización del telescopio y el microscopio en los siglos XVII y XVIII, el uso de esta máquina facilita enormemente la comprobación de las teorías mediante la experimentación, gracias al inmenso incremento de la capacidad de cálculo y a la posibilidad de hacer simulaciones de los procesos reales y de crear modelos de sistemas complejos. No se podrían haber desarrollado conceptos como los de atractores extraños, fractales, o complejidad algorítmica sin su existencia.

De hecho, todo este vasto campo de fenómenos no lineales, con alta sensibilidad a las condiciones iniciales, no era desconocido por los grandes matemáticos y físicos del siglo pasado; pero en esa época la solución de los correspondientes sistemas de ecuaciones requería cálculos numéricos tan engorrosos que los hacían impracticables, por lo que se debió esperar a la segunda mitad de este siglo, con la aparición de las computadoras veloces, para poder encararlos.

Uno de los resultados más positivos debidos al surgimiento de este nuevo campo de investigación es que se han formado grupos interdisciplinarios —integrados, por ejemplo, por biólogos, físicos, matemáticos, o sociólogos, economistas y expertos en computación— para estudiar los problemas inherentes a sistemas dinámicos complejos. Éstos abarcan desde líquidos turbulentos hasta sistemas ecológicos o los modelos económicos de las sociedades.

Varios centros de alto nivel han surgido, en particular en Estados Unidos, Rusia y Francia; así se pueden mencionar el Santa Fe Institute en Nuevo México, y departamentos dedicados al tema en Los Alamos National Laboratory (Center for Non-Linear Studies), el Instituto de Tecnología de Georgia, la Universidad de California en Berkeley, y el Centro de Investigaciones en Saclay, Francia, además del grupo en la Universidad Libre de Bruselas, Bélgica.

Un papel preponderante en el estudio de estos fenómenos fue el cumplido por la escuela rusa de físicos y matemáticos,

como Landau, Kolmogorov, Andronov, Lyapunov y otros, quienes desarrollaron las técnicas necesarias mucho antes de que el caos determinista pasara a ser un tema de moda. Dicha escuela sigue haciendo grandes contribuciones a esta importante área.

En los últimos años el avance de esta actividad se manifiesta por la creciente cantidad de congresos sobre sus diversos aspectos. Las posibilidades de aplicación a las más diversas ciencias se pusieron de relieve en la Primera Conferencia de Caos Experimental, realizada en Estados Unidos en octubre de 1991, donde se demostró que hay casos en los que se puede aprovechar el caos en lugar de evitarlo, y obtener entonces sistemas de más flexibilidad que los que por ser ordenados tienen un comportamiento "bueno", o sea predecible.

Este libro tiene como propósito describir las características fundamentales de los sistemas complejos y de los métodos que se utilizan para estudiar su comportamiento.

Deseo, por último, expresar mi agradecimiento a Marcos Saraceno por sus valiosas sugerencias acerca del desarrollo de este tema y de la presentación del texto.

I. El universo, ¿funciona como un reloj?

ES COMÚN a muchos mitos de la creación el concepto de una batalla eterna entre Orden y Caos, lo que sugiere que estos dos conceptos están profundamente arraigados en la mente humana.

Para la humanidad primitiva, la Naturaleza era el Caos, un ente caprichoso, sujeto a los antojos de dioses poderosos e indescifrables, cuyas acciones no se podían prever.

Así, las cosmologías de muchas culturas imaginaron un estado inicial de Desorden, o Caos, del que surgieron las cosas y los seres.

En *La teogonía,* Hesíodo dice: "El Caos fue lo primero, y luego la Tierra". Caos es una palabra de origen griego, equivalente a abismo, o también a una entidad sin forma; cosmos, por su parte, designa el orden y, por extensión, el Universo.

Un mito chino de la creación dice que del caos surgieron los dos principios, Yin y Yang, que con sus aspectos femenino y masculino crearon luego todo el Universo.

En la Biblia leemos: "La Tierra estaba informe y vacía, y había oscuridad sobre la haz del abismo; y el Espíritu de Dios se cernía sobre la haz de las aguas".

El caos es entonces la sustancia primordial sin forma, con la que el Creador moldea el mundo. Pero los seres humanos necesitan descubrir un orden en la naturaleza, buscar las leyes detrás de su complejo comportamiento que les permitan conocer la duración de los días y las noches, las fases de la Luna, la época de las cosechas. Se introduce así la noción de orden

ante la necesidad de prever con anticipación, de predecir, indispensable para la supervivencia.

Lentamente, a lo largo de muchos milenios, el hombre fue descubriendo en la naturaleza comportamientos ordenados, regulares, los que aprendió a registrar, predecir y explotar.

En el pensamiento griego aparecen dos visiones diferentes acerca de qué es lo importante para nuestra comprensión del Universo, y que se mantienen en esencia en Occidente hasta nuestros días: el monismo estático de Parménides y el ser en perpetuo movimiento concebido por Heráclito.

Platón tomó de Parménides el énfasis en el orden, en los aspectos inmutables de la realidad, y de Pitágoras el estudio de las leyes matemáticas y geométricas que son las expresiones de las "Formas", ideas eternas, de las que el hombre percibe sólo las sombras. Además, como Heráclito, tenía presente la inestabilidad y el incesante fluir de todo lo que se manifiesta en la naturaleza.

Con este enfoque, el pensamiento platónico busca algo que está detrás del proceso de cambio y de la noción del paso del tiempo, para poder hacer una descripción inteligible de la realidad. El Cosmos es racional, y si en el comienzo existía el Caos, fue el Demiurgo, el Supremo Ordenador, quien dispuso la transformación del Universo desde el estado de desorden al de orden. Este Ser divino es matemático, y el orden que establece también lo es. El campo del conocimiento donde este concepto queda más claramente expresado es el de la geometría, y el pensamiento platónico hace una clara distinción entre las Formas, que son idealizaciones, son perfectas, y los objetos tal como aparecen en la naturaleza, en la que nunca se encontrarán círculos, esferas o planos perfectos.

De ahí la clara aversión de los pensadores platónicos a utilizar herramientas para estudiar la geometría —sólo toleraban el uso de la regla y el compás—, pues cualquier objeto material es imperfecto, pálido reflejo de las Ideas.

Por acción de la "causa errante", la materia se resiste a ser modelada por las ideas, e impide así que en ella encarnen del todo las formas puras de la geometría. El resultado es entonces un Cosmos agitado por innumerables pequeñas convulsiones, a las que modernamente podríamos denominar movimientos de torbellinos.

Para Platón, en consecuencia, hay una jerarquía formada por tres niveles fundamentales: las Ideas y Formas matemáticas, que son el modelo perfecto de todas las cosas; el Caos original, y un estado intermedio, que es nuestro mundo imperfecto, complejo, resultado de la tarea que hizo el Demiurgo partiendo del Caos y modelándolo sobre la base de las Ideas.

En este orden jerárquico, el valor supremo es el de las Ideas y Formas matemáticas, que expresan las cualidades divinas de simplicidad, armonía, regularidad.

Esta filosofía fue incorporada al pensamiento cristiano medieval, y los científicos a partir del Renacimiento han coincidido con sus aspectos fundamentales. Galileo, dos mil años después de Platón, dice que el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, y en su época se sientan las bases para el método científico, que consiste en buscar las leyes eternas que rigen un fenómeno natural, las que deben ser formulables en el lenguaje matemático, e interrogar a la naturaleza para descubrir si los hechos corroboran o niegan la teoría propuesta.

Para los pensadores como Galileo, Kepler, Newton o Einstein, todo ocurre como si Dios (o la naturaleza) hubiese elegido el orden de las "formas puras", las que cuanto más simples, se consideran tanto más bellas y verdaderas, y el ideal de la ciencia es hallar a través de la razón ese orden y regularidad que están detrás del desorden aparente de la naturaleza.

Como expresara con tanta claridad Albert Einstein:

> Reconocemos en la base de todo trabajo científico de cierta envergadura una convicción comparable al sentimiento religioso, pues acepta un mundo basado en la razón, un mundo inteligible. Esta convicción, ligada a un sentimiento profundo de una razón superior que se revela en el mundo de la experiencia, expresa para mí la idea de Dios.

La ciencia postula así que detrás de la complejidad del mundo hay leyes matemáticas que muestran una armonía subyacente, en la que no hay lugar para el desorden y lo imprevisible; éstos se disiparán al ser iluminados por la luz de la razón.

Pero hay otra visión que, hasta hace poco, ha sido menos difundida que la búsqueda platónica de aquello que es invariante en la naturaleza. Es la perspectiva de Aristóteles, que

pone su énfasis en el cambio, en los procesos observables en el mundo, en lugar de las Formas invariantes detrás de ellos que no pueden ser observadas.

En esta visión tuvieron mucha influencia sus observaciones del mundo viviente, para las que estaba muy bien dotado. Para los abogados de este enfoque, la naturaleza es semejante a un organismo, complejo, cambiante, y aceptan como reales y no como aparentes sus aspectos de desorden e imprevisibilidad, tratando de comprender sin eliminar esas características, así como nadie intentaría transformar un organismo vivo en una máquina tan previsible como un reloj.

Volveremos sobre este enfoque más adelante, pero detallaremos ahora las características del método científico tal como fuera aplicado a partir de la obra de los grandes pensadores como Galileo, Descartes, Huyghens y Leibniz.

El método científico aplicado por Galileo, tuvo su expresión matemática gracias a Descartes, quien enfatizó la necesidad de analizar, es decir, dividir lo que se examina en sus componentes más simples, para luego recomponerlo en una síntesis que permita comprender el fenómeno con certeza. Creó además la geometría analítica basándose en su introducción de las coordenadas, identificando así al espacio con una inmensa grilla a cada punto de la cual se le puede asignar un valor numérico, con lo que logró unir la geometría con el álgebra.

El mensaje de Newton

Hace tres siglos se publicó la monumental obra de Isaac Newton, *Principios matemáticos de filosofía natural,* cuyo mensaje ha sido decisivo para la cultura de Occidente.

Según éste:

> El Universo es ordenado y predecible; tiene leyes expresables en lenguaje matemático, y podemos descubrirlas.

Como hemos visto, para los científicos a partir del Renacimiento se reafirma el enfoque platónico, ya que hay un orden en el Universo detrás de su aparente complejidad, con leyes simples que contienen aspectos inmutables, expresados por las

famosas magnitudes que se conservan invariantes en la física: energía total, impulso, carga eléctrica.

Las leyes descubiertas por Newton parecen sencillas, y su aplicación al comportamiento de los cuerpos permitió describir con precisión el movimiento de los astros en el firmamento, la caída de los cuerpos, etcétera.

Newton formuló sus leyes mediante ecuaciones matemáticas, que relacionan las magnitudes que podemos medir de un cuerpo, tales como su posición y su velocidad, con la forma en que estas varían con el tiempo.

LEYES DE NEWTON DE LA DINÁMICA

1) *Inercia:* Todo cuerpo material que no tiene aplicada una fuerza permanece en reposo o se mueve en línea recta con velocidad uniforme.
2) *Fuerza:* Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo libre su impulso cambia en el tiempo proporcionalmente a dicha fuerza, y la dirección de su movimiento es la de la línea de acción de la fuerza.
3) *Acción y reacción:* Para cada acción ejercida sobre un cuerpo hay siempre una reacción igual y opuesta.

La primera ley fue la formulación del descubrimiento de Galileo, quien notó que se debe atender no a la velocidad de un cuerpo sino al cambio de esa velocidad con el transcurso del tiempo, poniendo fin así a la creencia aristotélica que había bloqueado el avance de la física por muchos siglos.

Newton aplicó además un concepto que ha sido esencial para el método científico: el de aislar idealmente el sistema dinámico que se desea examinar del resto del universo del que forma parte. Esto permite que su comportamiento se pueda comprender, ya que no es necesario considerar todas sus infinitas relaciones con el universo, lo que sólo sería posible para un ser infinito. Basta entonces que se consideren sólo aquellas características del sistema que son relevantes al fenómeno que se desea estudiar. Así, la primera ley pregunta qué se puede decir del movimiento de un cuerpo aislado, o sea al que no se

le está aplicando una fuerza. Aristóteles había dicho que deberá mantenerse en reposo.

Newton, al igual que Galileo antes, establece que, en esa situación, el cuerpo puede estar en reposo o puede moverse en línea recta con velocidad uniforme.

Si un cuerpo cae hacia la tierra, esto se debe a que sobre él actúa la fuerza de gravedad, y por lo tanto su velocidad no puede ser uniforme sino que será cada vez mayor; por eso es más peligroso caer desde una altura grande que de una menor.

¿Hay algo que se mantenga constante en este proceso de caída? Sí, la aceleración, es decir, la velocidad con la que aumenta la velocidad del cuerpo al caer.

La segunda ley formula este concepto, que se expresa matemáticamente como $F = m \times a$ (la fuerza F aplicada al cuerpo es proporcional a la aceleración a de su movimiento, según una constante m, la masa o cantidad de materia del cuerpo).

Para cualquier sistema dinámico del Universo, las leyes de movimiento se pueden expresar como $F = m \times a$, no importa cuál sea el origen de la fuerza aplicada. Puede tratarse de la fuerza de gravedad, la eléctrica o la magnética, y para todas vale la misma asombrosamente simple ecuación.

La velocidad con que cambia una magnitud se determina por la diferencia entre sus valores para dos tiempos sucesivos, y de allí el término "diferencial" que aparece en el análisis matemático: las ecuaciones de Newton involucran velocidades de cambio y son, por lo tanto, *ecuaciones diferenciales.*

Las ecuaciones algebraicas se distinguen de las diferenciales porque no involucran velocidades de cambio. No son siempre fáciles de resolver. Pero resolver ecuaciones diferenciales es, en general, mucho más dificultoso, y resulta realmente asombroso que tantas ecuaciones importantes por sus aplicaciones a la física tengan una solución definida.

Un principio matemático básico de las ecuaciones diferenciales es que su solución, es decir, su integración, está determinada unívocamente, y da un único resultado para cada conjunto de datos numéricos que se introduzca en las ecuaciones; si, por ejemplo, se quiere conocer qué altura alcanzará un proyectil, introduciendo en las ecuaciones los datos de la velocidad inicial, ángulo del cañón, etcétera, se obtiene un resulta-

do que define sin ambigüedad esta altura; son por lo tanto ecuaciones deterministas: hay un único efecto para cada causa.

La importancia de estas ecuaciones diferenciales estriba en que se les puede aplicar a un sistema dinámico, es decir a todo proceso que cambia en el tiempo.

Muchos físicos y matemáticos se han maravillado ante el hecho de que estas ecuaciones parezcan tan efectivas para describir la estructura del mundo físico.

En vista de la complejidad del mundo que nos rodea, es realmente notable que haya fenómenos naturales que admitan una descripción mediante leyes físicas simples. ¿Cómo es esto posible?

Fue Isaac Newton quien tuvo la visión que abrió el camino para que las ciencias naturales tuvieran tanto éxito en estos tres últimos siglos.

Éste se debe en parte a que inicialmente restringió su atención al estudio de sistemas naturales simples con sólo unos pocos componentes.

Leyes físicas y condiciones iniciales

De acuerdo con el enfoque que hizo Newton de la mecánica, un sistema material puede ser dividido conceptualmente en: *1)* las "condiciones iniciales", que especifican su estado físico en cierto tiempo inicial (estas condiciones pueden ser, por ejemplo, la posición y la velocidad de un proyectil, o de la Luna respecto de la Tierra); *2)* las "leyes físicas" o naturales, que especifican cómo cambia ese estado.

Las condiciones iniciales son usualmente muy complicadas, una complicación que refleja la complejidad del mundo en que vivimos. Las leyes naturales, por otra parte, pueden ser y son más bien simples, y se expresan mediante las ecuaciones diferenciales. Esta división —leyes y condiciones iniciales— se mantiene hasta hoy.

En la práctica sólo se pueden resolver en forma estricta aquellas ecuaciones que representan las leyes físicas simples para sistemas con condiciones iniciales simples: el disparo de un proyectil, el movimiento de la Tierra alrededor del Sol sin tener en cuenta la influencia de los demás planetas. Esto es,

ante la infinita complejidad de la naturaleza, que hace que cualquiera de sus componentes esté vinculado con los demás por una inmensa cantidad de relaciones, se hace una abstracción, considerando idealmente el sistema que se desea estudiar como separado del resto, y seleccionando aquellas características del sistema que parecen ser lo suficientemente importantes frente a las otras que no producen casi efectos sobre el fenómeno que se está examinando. Así, para calcular la trayectoria de un proyectil sólo se considera cómo influye sobre él la atracción de la gravedad de la Tierra, pues la atracción que ejercen la Luna o el Sol es tan pequeña que no se necesita incluirla en las condiciones iniciales. Del mismo modo, para estudiar el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra no se tendrá en cuenta la atracción de las estrellas.

Se tienen entonces condiciones iniciales simples porque se han seleccionado aquellas variables que son las que más afectan el fenómeno en estudio, y además éstas obedecen a leyes que se expresan con ecuaciones en las que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales dan soluciones que difieren poco entre sí. De esta manera, el hecho de que las condiciones iniciales se conozcan en general con cierto margen de error afecta relativamente poco el resultado que se puede esperar de estas ecuaciones. Por ejemplo, si se dispara un proyectil con un fusil, el cálculo de dónde golpeará al blanco partiendo de una cierta posición de su cañón o de otra ligeramente distinta producirá una diferencia proporcionalmente pequeña en el resultado.

Otro aspecto importante, también estudiado por los fundadores de la mecánica, fue el de la reversibilidad en el tiempo de las trayectorias en los sistemas dinámicos: las ecuaciones muestran que si se invierte el sentido de las velocidades de todos los componentes del sistema, reemplazando v por $-v$, el resultado es matemáticamente equivalente a cambiar el tiempo t por $-t$, como si el sistema fuese "hacia atrás" en el tiempo. Esto es la forma matemática de expresar que si a partir de un cierto instante hay un cambio en el sistema dinámico, otro cambio, definido mediante la inversión de las velocidades de los componentes, puede restaurar las condiciones originales.

Ateniéndose a estas reglas de juego, se llega a la conclusión de que en un sistema que responde a las leyes de la mecánica clásica, y que, por lo tanto, es determinista, si se conocen las posiciones y las velocidades de sus componentes en un instante dado, se pueden calcular las posiciones y velocidades en todo instante siguiente o anterior.

Así si en el sistema dinámico formado por dos bolas de billar conocemos en un momento dado inicial la posición y velocidad de cada una, podremos mediante las ecuaciones diferenciales de Newton predecir los movimientos respectivos desde que se les da el impulso inicial hasta que abandonan el paño.

Más aún, al finalizar el siglo XVIII se llegó a la convicción de que si se conociera la posición y velocidad de cada uno de los planetas que componen el sistema solar en un instante dado, se podría calcular la posición de los mismos en el futuro, y también su posición en el pasado, mediante ecuaciones que determinan sin ambigüedad las trayectorias. Precisamente la aplicación de las ecuaciones al movimiento de los astros, la mecánica celeste, fue lo que significó el mayor triunfo para Newton.

Las diversas disciplinas científicas que se fueron desarrollando en los siglos siguientes a partir de la teoría de Newton estudiaron otras magnitudes además de la posición y la velocidad de los cuerpos. Pero el procedimiento, consistente en introducir los valores de dichas magnitudes para un tiempo inicial en una ecuación matemática que, una vez resuelta, determina esos valores para cualquier otro tiempo, es el mismo ya sea que se trate de la configuración de un átomo, el movimiento de un cometa, la temperatura de un gas o el voltaje en un circuito eléctrico.

Al finalizar este proceso de desarrollo científico parecía que el comportamiento de todo el Universo podría llegar a expresarse matemáticamente, ya que está determinado por las leyes mencionadas, inmutables, que dictan el movimiento de cada partícula en forma exacta y para siempre, consistiendo la tarea del científico en aplicar estas leyes a los fenómenos particulares.

El esquema newtoniano posibilitó así la construcción de la

majestuosa estructura de la mecánica clásica, que dio a la humanidad la visión de un Universo ordenado y predecible.

El demonio de Laplace

Esta revolución del pensamiento tuvo su más clara expresión con Pierre Simon de Laplace, quien en la época de Napoleón expresó, en su *Teoría analítica de las probabilidades:*

> Debemos considerar el estado presente del Universo como el efecto de su estado anterior y como la causa de su estado futuro. Una Inteligencia que, por un instante, conociese todas las fuerzas de que está animada la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuese lo bastante profunda para someter a éstos al análisis [matemático], abrazaría en la misma fórmula a los movimientos de los más grandes cuerpos del Universo y del átomo más ligero: nada sería incierto para ella y el devenir, como el pasado, estaría presente ante sus ojos.
>
> El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un pálido ejemplo de esta Inteligencia. Sus descubrimientos en mecánica y en geometría, junto con el de la gravitación universal, lo han puesto en condiciones de abrazar en las mismas expresiones analíticas a los estados pasados y a los futuros sistemas del mundo.

Se tiene así la visión del Universo como un mecanismo gigantesco que funciona "como un reloj" (no un reloj electrónico digital, sino de los clásicos, formados por piezas móviles, resortes y engranajes). Dicho mecanismo es, por encima de todo, absolutamente determinista y, por lo tanto, predecible: está gobernado por leyes eternas que hacen que bajo circunstancias idénticas resulten siempre cosas idénticas. Y si las circunstancias, en vez de repetirse en forma idéntica, cambian levemente, el resultado cambiará también en forma proporcionalmente leve.

Un especialista en estas leyes de la mecánica que conozca sus características y su estado en un momento dado puede, en principio, establecer qué hará exactamente en cualquier momento del pasado y del futuro. Si en la práctica esto se puede aplicar sólo para sistemas relativamente simples, relojes, má-

quinas, planetas, y hay muchos objetos en el mundo que parecen tener comportamientos irremediablemente desordenados, caóticos, impredecibles, se trata sólo de algo aparente, y a medida que se vaya perfeccionando el análisis matemático y se descubran las leyes físicas ocultas correspondientes, llegará el día en que ese aparente caos desaparecerá.

Desde este punto de vista el futuro está rígidamente determinado desde el comienzo del Universo. El tiempo deja de tener mucho significado físico, ya que es como si esa Inteligencia propuesta por Laplace que muchos llamaron el "demonio de Laplace" (del griego "dáimon", divinidad secundaria intermedia entre los dioses y el hombre), tuviera toda la historia del

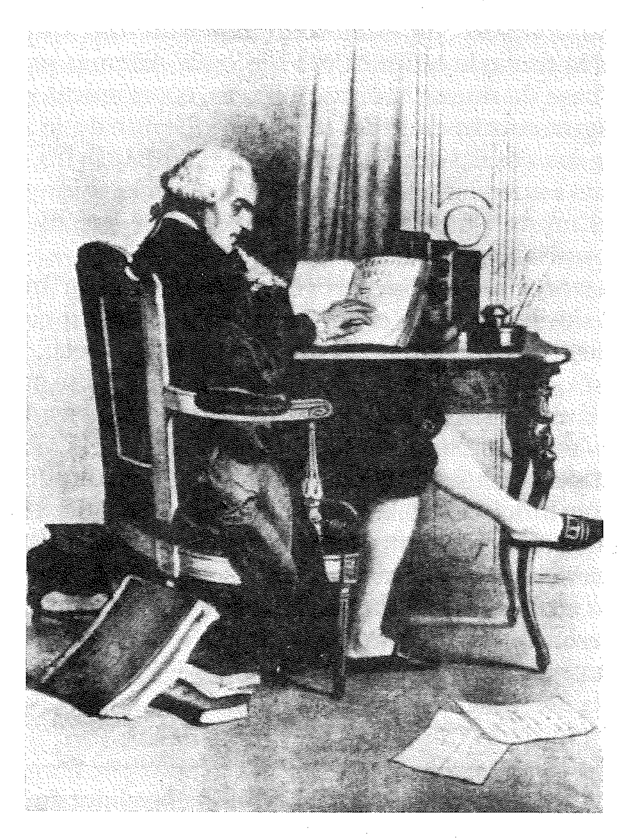


FIGURA I.1. *Pierre Simon de Laplace leyendo su* Mecánica Celeste. *Tomado de W. F. Freeman,* Mathematics in the Modern World, *San Francisco, Morris Kline.*

Universo grabada en una película cinematográfica, la cual se puede contemplar yendo hacia adelante o atrás en el tiempo. Como este tiempo es reversible, sólo marca la dirección en que se observa un proceso que no puede modificarse.

II. Donde aparece el caos en la máquina

DURANTE los siglos XVIII y XIX se aplicó la mecánica de Newton con impresionante éxito. El punto de vista mecanicista se popularizó y, combinado con el método experimental, dio un gran impulso a la física, la química y la biología. Además se transformó en la base de nuevas teorías políticas, económicas y sociales.

La antigua concepción del caos como señor de la naturaleza, donde las cosas sucedían por azar, por capricho, sin relación alguna entre causa y efecto, cedió paso a la visión de un orden en el mundo tan determinado como el que muestra un buen reloj suizo.

Pero parecería que hay procesos cíclicos en la historia, o más bien similares a una espiral circular donde un ciclo no se repite exactamente, sino que pasa a un nuevo nivel.

Algo así ocurre con el tema de orden y caos en nuestra visión del Universo. El caos primitivo fue reemplazado por el orden newtoniano. Sin embargo, a medida que el conocimiento de la naturaleza se afianzaba, aparecían dificultades para el modelo mecanicista. En la segunda mitad del siglo XIX quedó claro cuáles eran los límites de la mecánica clásica: su validez no alcanzaba para velocidades extremadamente grandes o para el mundo extremadamente pequeño. Producto de esta crisis surgieron, en la segunda mitad del siglo XX, dos nuevas ramas de la física que estudian, respectivamente, la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica.

La teoría de la relatividad marcó el límite de la validez de las ecuaciones de Newton, las que deben ser corregidas cuando se está frente a velocidades cercanas a la de la luz.

La mecánica cuántica establece, mediante el principio de incertidumbre, un límite a la precisión con que se pueden medir simultáneamente variables tales como la posición y la velocidad de una partícula atómica.

Hoy, los científicos de numerosas disciplinas comienzan a convencerse de que hay un tercer límite a la posibilidad de conocimiento de la naturaleza, y que además es válido para el mundo de nuestra experiencia cotidiana: en muchas circunstancias no sólo no se puede predecir el comportamiento de los componentes individuales en sistemas dinámicos complejos, que involucran las interacciones de gran cantidad de componentes, sino que lo mismo puede ocurrir aun en el caso de sistemas simples, formados por unos pocos componentes que estén sometidos a la acción de dos o más fuerzas.

Todos sabemos que el mundo en que vivimos es complejo, y nadie se sorprende del poco alcance que tienen las predicciones sobre la economía de un país, o el tiempo meteorológico, o el comportamiento de cualquier ser humano o de los organismos vivos en general. Esto se ha tomado siempre como la indicación de que si es que hay leyes para este mundo tan complicado, tendrían que ser complicadas, y no como las que rigen para los sistemas dinámicos que ha estudiado la física, que exhiben características de orden y predecibilidad. Pero resulta ahora que aun sistemas físicos simples, sometidos a leyes simples, pueden tener un comportamiento caótico, no previsible.

De manera que se nos plantea el dilema: ¿nuestro mundo complejo está gobernado por leyes simples que iremos descubriendo progresivamente mediante los métodos desarrollados por la ciencia, de acuerdo con una visión que hemos llamado platónica? ¿O adoptaremos una visión que recuerda a la aristotélica, en cuanto a poner el énfasis en los procesos de cambio con el transcurrir del tiempo, aceptando que en muchos casos no se pueden predecir con exactitud los comportamientos de los procesos mediante leyes simples que rigen detrás de los fenómenos?

Para responder este dilema es necesario examinar en qué condiciones parece ser válido uno u otro enfoque.

Muchos sistemas dinámicos, cualquiera sea su naturaleza (físicos, químicos, electromecánicos, biológicos), son extremadamente sensibles a los valores de sus condiciones iniciales, tales como la posición, la velocidad, etcétera. Esto pone un límite a la posibilidad de predecir el estado futuro del sistema, ya que, como hemos visto, dicha predicción está basada en la suposición de que las causas pequeñas producen efectos también pequeños y que, por lo tanto, un pequeño cambio en los valores iniciales de las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema, producirá un cambio proporcionalmente pequeño en la solución de estas ecuaciones que nos da a conocer el estado futuro.

Corresponde aquí distinguir entre ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. La solución de una ecuación diferencial se denomina integración; la clase más importante entre las ecuaciones integrables es la de las ecuaciones lineales. La más simple de entre ellas depende de una sola variable, y su solución queda representada gráficamente mediante una línea recta; de ahí el nombre de ecuación lineal.

La familia de las ecuaciones lineales tiene la característica de que las soluciones que se obtienen al resolverlas para diversos valores numéricos de las variables, se pueden sumar entre sí, dando como resultado también una solución. Un ejemplo simple es el de la ecuación lineal de onda, que describe el movimiento sobre una superficie líquida de ondas de pequeña amplitud. La ecuación tiene muchas soluciones diferentes, cada una con diferentes amplitudes y longitudes de onda, y éstas se pueden sumar produciendo así una nueva solución de la ecuación. Esto expresa matemáticamente el hecho físico de que, como se ve en el agua en un lago, varias ondas diferentes se pueden superponer, y estas superposiciones corresponden también a una solución que es la suma de soluciones de la ecuación lineal de onda.

En general, las ecuaciones lineales son mucho más fáciles de resolver que las no lineales, y por eso han sido las más estudiadas; además, cuando un fenómeno físico requería ser expresado mediante una ecuación no lineal de difícil solución, el procedimiento usual era linealizarla eliminando aquellos tér-

minos que influían menos, es decir, se hacia una aproximación lineal.

Pero en la naturaleza, la mayoría de los fenómenos son expresables mediante ecuaciones no lineales. Las ecuaciones con buen comportamiento de la mecánica clásica, tales como las que determinan el movimiento de la Luna, y que permiten predecir con exactitud el futuro del sistema, son las excepciones, no la regla.

Recién fue posible encarar la resolución de cualquier ecuación no lineal con la aparición de las computadoras, ya que éstas permiten el análisis numérico de todo tipo de ecuación —lineal o no lineal—, por complicada que sea.

Hoy se puede entonces, gracias a las computadoras, encarar el estudio de los sistemas dinámicos cuyo comportamiento responde a ecuaciones no lineales, y que son precisamente los que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales.

Como ejemplo de esta sensibilidad consideremos un sistema de comportamiento no lineal, e inestable: un cono de metal parado sobre su vértice, similar al de la figura II.1. Por más que hagamos vertical a su eje, terminará por tumbarse, y el lado sobre el que caiga dependerá de diferencias minúsculas que rompen el equilibrio: un leve soplo, una pequeñísima mota de polvo. Predecir de qué lado caerá el cono requeriría el conocimiento preciso de todas las fuerzas a las que está sometido en el momento inicial de equilibrio, lo que equivaldría al imposible de introducir la totalidad de una inmensa cantidad de parámetros como condiciones iniciales en las ecuaciones de movimiento.

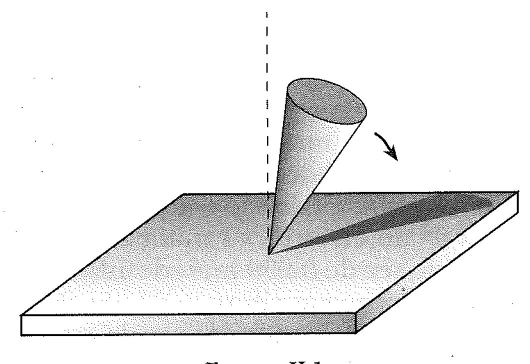


FIGURA II.1.

Otro ejemplo de sistema inestable de comportamiento no lineal es el de la ladera cubierta de nieve de una montaña, que puede estar en una situación tal que la energía producida al lanzar un grito provoque como efecto una avalancha de muchas toneladas de nieve, evidentemente desproporcionado a su causa.

Si se trata, en cambio, de sistemas dinámicos que repiten periódicamente un comportamiento, en aquellos casos en que un pequeño cambio en las condiciones iniciales se reproduzca multiplicado en cada uno de los periodos siguientes, de modo que haya una situación llamada de realimentación positiva, y que se describe mediante ecuaciones no lineales, se puede llegar a situaciones tan diferentes que no haya posibilidad de predecirlas.

Consideremos un sistema dinámico, formado por una esfera sometida a una fuerza que la haga rodar sobre un riel circular que tiene una longitud de 10 metros, como en la figura II.2.

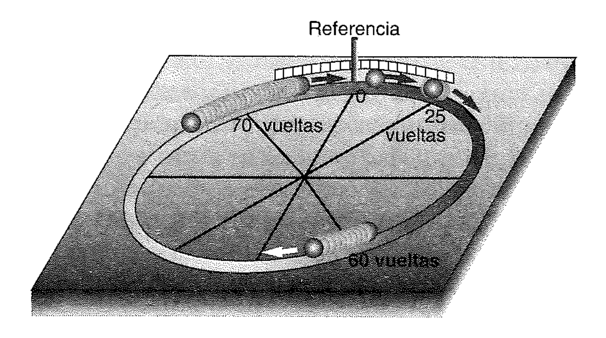


FIGURA II.2.

Para ubicar la posición de la esfera en cualquier momento mediremos la longitud de riel que la separa de un punto fijo de referencia que hemos marcado sobre el mismo. Supongamos que la posición inicial de la esfera es de 1 metro respecto de esa referencia, y que medimos esa posición con una cinta métrica que nos da un error de ±1 milímetro, es decir, que la posición real puede ser de 0.999 m, o de 1.001 m o cualquier valor comprendido entre esas cifras.

Supongamos además que cada vez que la esfera pasa por el punto de referencia recibe un impulso, y que éste provoca un

desplazamiento de la esfera sobre su órbita que incrementa en un 10% la posición, de modo que si estaba entre 0.999 y 1.001 m en el momento inicial, se multiplica por un factor 1.1 y dicha posición pasa a ser entonces de entre 1.099 y 1.101 m al cabo del primer periodo, y a su vez vuelve a multiplicarse por 1.1 para cada uno de los periodos sucesivos por lo que la posición será de: entre 1.209 y 1.211 m en el segundo periodo, entre 1.329 y 1.332 m en el tercero, etcétera. Al cabo de 25 vueltas, la posición será prácticamente la misma que al principio: entre 10.825 y 10.845 m, que como la longitud total del riel es de 10 metros, ubica a la esfera entre 0.825 y 0.845 m respecto de la referencia. Pero obsérvese que si bien la esfera ha vuelto en el periodo 25 a estar prácticamente en la posición inicial, la indefinición en su posición ha crecido: es ahora una zona de ±10 mm de longitud sobre el riel. La imprecisión inicial de ±1 mm en su ubicación se ha multiplicado por 10.

En la figura II.2 se ha ilustrado la situación a las 25 vueltas y después de 60 vueltas, donde la esfera puede estar en cualquier posición entre 3.81 y 4.19 metros, y a las 70 vueltas donde estará entre 8.21 y 9.79 metros. Después de 97 vueltas, esta indefinición en la posición se habrá amplificado 10 mil veces y, por lo tanto, será de 10 metros. De modo que la esfera puede estar en cualquier punto del riel de 10 metros de longitud, y no podemos saber de antemano cuál es ése punto mediante un cálculo.

Por supuesto, esto parece fácilmente remediable: ya que se ha utilizado para medir la posición inicial una cinta métrica que da un error de 1 mm, se la puede cambiar por un instrumento mucho más preciso, que dé un error 10 mil veces menor, de solamente 1 décimo de micrón.

Ahora sí, con este dato inicial tan preciso se puede ubicar la esfera mediante un cálculo que predecirá su posición dentro de 97 vueltas con un error no mayor que 1 mm.

Pero, ¿y si se pretende seguir prediciendo mediante el cálculo la ubicación para un mayor número de vueltas?

Ocurre que aun con esta medición inicial mucho más precisa, a las 193 vueltas se está otra vez en la situación primera: una indefinición de 10 metros, que no permite predecir dónde está la esfera. Como es obvio no se puede seguir aumentando de manera indefinida la precisión de la medida, pues rápi-

damente aparece la necesidad de medir magnitudes con un error menor que el tamaño de un átomo, y aun cuando se pudiese realizar semejante maravilla, unos cientos de vueltas más llevarían a la misma frustrante situación.

Estamos aquí entre la espada y la pared: o utilizamos una medición aproximada, lo que no es lo suficientemente exacto como para hacer la predicción para cualquier estado futuro, o intentamos realizar una medición tan extremadamente precisa que es impracticable.

Un sistema dinámico que tiene este comportamiento no es raro en la naturaleza. Se trata de sistemas que repiten periódicamente un cierto estado, y donde éste sufre una perturbación que se multiplica en cada periodo (es el caso de la resonancia), lo que es suficiente para que se produzcan después de cierto tiempo efectos de una magnitud desproporcionadamente grande en comparación con la perturbación inicial. En estos sistemas, regidos por leyes estrictamente deterministas, en ciertas condiciones el cálculo del comportamiento puede resultar crecientemente impreciso, haciendo que todo intento de predecir el futuro a largo plazo sea derrotado.

Los procesos físicos están determinados, pero ¿se pueden predecir siempre?

Se hace necesario ahora distinguir la diferencia entre determinismo y predecibilidad, dos palabras que desde la época de Laplace se consideraban sinónimas. Se ve que, en ciertas condiciones, un sistema dinámico puede ser determinista y, sin embargo, tener un comportamiento no predecible.

Por supuesto que los físicos sabían que el Universo muestra una inmensa complejidad, pero se suponía que, en general, se puede analizar la misma para descomponerla en sus componentes simples, y que de los mismos se pueden seleccionar unas pocas variables como condiciones iniciales para introducir en las ecuaciones, ya que la inmensa mayoría de las otras condiciones es de tan pequeña magnitud, que el no considerarlas no afecta el resultado. Pero aprendemos ahora que estos casos son algo especial, y que mucho más común es la situación en que aun cuando se trate de sistemas para los que rige el deter-

minismo, hay una limitación de la posibilidad de predecir el comportamiento futuro que puede llegar a ser prácticamente equivalente a una situación de caos.

No significa, sin embargo, que no se pueda decir nada sobre dichos sistemas, ya que para ciertas condiciones iniciales, el comportamiento si es ordenado y, por lo tanto, predecible a largo plazo. Además, aun en el estado de comportamiento caótico, estos sistemas presentan muchas propiedades que se pueden comprender con la ayuda de la teoría de probabilidades, siendo esta mezcla de determinismo y probabilidad una forma muy fructífera de atacar los problemas característicos de los sistemas complejos.

Se trata entonces de una nueva física de fenómenos no lineales cuyo objeto es el estudio de procesos tales como, por ejemplo, las turbulencias y oscilaciones físico-químicas y biológicas. Estos fenómenos tienen un aspecto aparentemente azaroso, pero con similitudes insospechadas en su comportamiento, lo que conduce a que se encare su estudio mediante métodos matemáticos, donde resultan comunes nociones como la bifurcación, los atractores extraños y los exponentes de Lyapunov.

Este nuevo enfoque de los fenómenos complejos implica un cambio de paradigma, ya que el planteo de Laplace con su demonio capaz de predecir cualquier evento queda puesto en sus justos términos: no se trata de predecir absolutamente todos los fenómenos que aparecen en la naturaleza merced a los cálculos basados en las leyes deterministas; ni Laplace ni ningún físico han soñado que esto sea posible. Pero el demonio pone de relieve que esta imposibilidad se debe a nuestra imperfección, como seres limitados que somos.

Sólo un Ser absoluto podría conocer el futuro a cualquier plazo, siempre y cuando conociera todas las condiciones iniciales con infinita precisión, y, en sus cálculos, además manejara números con una infinita cantidad de cifras, como los números irracionales. Ni los seres humanos ni las computadoras pueden hacer esto, ya que necesariamente utilizan una cantidad finita de condiciones iniciales y un número limitado de cifras en sus cálculos.

Éste es un enfoque platónico, que postula que existe una realidad matemática que sí es perfecta, un ideal que marca la meta hacia donde se deben dirigir nuestros esfuerzos. La ac-

ción coherente con este enfoque consiste en concentrar los esfuerzos en hallar la solución de las ecuaciones que describen al fenómeno, para introducir en ellas los datos empíricos obtenidos cada vez con mayor precisión, en la confianza de que con el transcurso del tiempo se estará así más y más cerca de predecir un creciente repertorio de comportamientos.

Es esta visión de continuo progreso la que se cuestiona actualmente para el estudio de los sistemas complejos, ya que la sensibilidad a las condiciones iniciales puede ser tal que ninguna observación, no importa cuán precisa sea, nos llevará a determinar esas condiciones con la exactitud suficiente. Si bien en un sistema determinista el estado inicial determina el estado final, en estos sistemas no lineales el conocimiento aproximado del estado inicial no permite deducir un conocimiento aproximado del estado final, por lo que pierde sentido poner la prioridad en resolver las ecuaciones para introducir datos cada vez más exactos en ellas.

Esta dificultad para las predicciones en sistemas deterministas complejos ya se conocía en el siglo pasado: el físico James C. Maxwell, que tuvo un papel fundamental en la teoría del electromagnetismo, expresó en una de sus conferencias en 1873, que si bien las mismas causas producen los mismos efectos, cuando hay sensibilidad a las condiciones iniciales, las causas semejantes pueden no tener efectos semejantes. Da entre otros ejemplos la explosión del algodón pólvora y el efecto de pequeñas acciones humanas que pueden desencadenar grandes cambios sociales.

El gran matemático Henri Poincaré escribió en 1908, en su *Ciencia y método,* que "una causa muy pequeña, que se nos escapa, determina un efecto considerable que no podemos dejar de ver y entonces decimos que ese efecto se debe al azar". Luego se extiende en este concepto:

> ¿Por qué los meteorólogos encuentran tan difícil prever el tiempo con alguna certeza? ¿Por qué las lluvias, las tempestades mismas nos parecen llegadas al azar, de modo que mucha gente cree natural rezar para que caiga la lluvia o haga buen tiempo, cuando en realidad encontrarían ridículo pedir con una plegaria un eclipse? Vemos que las grandes perturbaciones se producen en general en las regiones donde la atmósfera está en equilibrio inestable. Los meteorólogos bien ven que ese equilibrio es inestable, que algún

ciclón se dará en alguna parte, pero ¿dónde? No están en condiciones de decirlo; una décima de grado más o menos en un punto cualquiera y el ciclón estalla aquí y no allá y extiende sus estragos en comarcas que de otra manera no habrían sido devastadas. Si se hubiera conocido esa décima de grado podría habérselo sabido de antemano, pero las observaciones no fueron ni bastante rigurosas ni bastante precisas y por eso todo parece debido a la intervención del azar.

Para Poincaré esa aparición del azar en la naturaleza tiene dos raíces principales: *1)* la ya mencionada sensibilidad a las condiciones iniciales, que hace que aunque las leyes del sistema se conozcan, los pequeños errores iniciales tienen una enorme influencia sobre el estado final, y *2)* la complejidad de las causas, por lo que cuando en el proceso de análisis del sistema se le aísla idealmente, se toma en cuenta apenas una parte de todas las innumerables influencias a las cuales está sometido.

Este procedimiento es efectivo sólo para los sistemas integrables, que, en general, son sistemas lineales. En cambio para los no lineales, esta separación para su análisis se hace pagando el precio de disminuir el alcance de la predicción.

Tanto Maxwell como Poincaré pusieron como ejemplo de los sistemas dinámicos con sensibilidad a las condiciones iniciales, el caso de un gas formado por muchas moléculas que vuelan a gran velocidad en todas direcciones y tienen muchas colisiones entre sí. Si se desea determinar la evolución de un sistema de una cantidad de componentes tan inmensa como los que forman un gas, se debe tener en cuenta que es imposible calcular con las ecuaciones diferenciales de Newton el movimiento de cada una de las partículas.

Piénsese que un centímetro cúbico de aire contiene 27 trillones (millones de millones de millones) de átomos, y que no alcanzaría toda la superficie de la Tierra para escribir nada más que las ecuaciones diferenciales correspondientes, sin mencionar el cálculo para determinar con ellas el movimiento de cada átomo en ese centímetro cúbico de gas.

Supongamos que pudiésemos observar una pequeñísima porción de ese centímetro cúbico de aire, una porción lo suficientemente limitada como para poder registrar el movimiento de las pocas moléculas que estuviesen allí presentes. Pode-

mos imaginar que al aislar así idealmente nuestra zona de observación, podríamos seguir las trayectorias en línea recta individuales, las colisiones entre moléculas y cómo rebotan, y comprenderíamos que éstas siguen las leyes de la mecánica y que son perfectamente predecibles, ya que podríamos calcular sus movimientos individuales... ¡Inútil esfuerzo, ya que sólo sería válido por un brevísimo tiempo! Ocurre que repentinamente llegarían desde fuera de nuestra zona de observación más moléculas, que no figuraban entre nuestros datos iniciales, y desaparecerían de la zona moléculas que estaban en observación, y el resultado sería ahora un movimiento distinto, con nuevas colisiones imprevistas, imposible por lo tanto de calcular, tan imprevisible como si se tratara de un proceso regido por el azar. Comprendemos así que si se observa sólo una fracción ínfima de un proceso muy complejo, formado por innumerables componentes, con una enorme cantidad de distintas variables que actúan sobre el sistema, éste puede aparecer como aleatorio, desordenado.

Esto es válido no solamente para un conjunto de moléculas en un gas: hay cierto paralelismo con los fenómenos que estudian las ciencias sociales, ya que si se desea examinar la economía de una nación o su evolución política, estudiando una pequeña parte aislada del conjunto, se va hacia un fracaso, pues esa parte estará sujeta continuamente a las influencias incontrolables e imprevistas del resto del sistema.

¿Cómo proceder entonces? Parecería que al estar vedado el conocimiento detallado de cada comportamiento individual, habría que resignarse a aceptar que los sistemas sociales, biológicos, económicos y físicos con una gran cantidad de componentes no se pueden encarar con el método científico, ya que tienen un comportamiento que aparentemente depende del puro azar, aunque se pueda pensar que están regidos por leyes deterministas.

La respuesta a esta pregunta surgió en el campo de las ciencias sociales del siglo XIX, cuando se quisieron estudiar las características sanitarias y económicas de las naciones. Se aplicó para ello la rama práctica de las probabilidades, que es la estadística.

Su desarrollo matemático fue iniciado por A. Quetelet en 1820, con su libro *Mecánica social,* inspirado en el modelo de la

Mecánica celeste de Laplace, y que tenía como objetivo desarrollar las "ciencias morales y políticas". Aparece allí la idea del hombre promedio, con una longitud de vida, ingreso económico, etcétera, que se calculan como promedio de los de toda la población.

La experiencia con el estudio de los gases enseña que, a pesar de que a escala microscópica hay un número de componentes tan grande que es imposible conocer sus comportamientos individuales, éstos muestran en conjunto a escala macroscópica propiedades globales como la temperatura, presión, densidad, volumen, que se pueden medir, y que se relacionan entre sí con leyes bien definidas. Esto es análogo a lo que acontece con una población humana de un número grande de individuos, para la que se pueden establecer parámetros como la tasa de nacimientos, muertes, producto per cápita, etcétera, sin necesidad de seguir cada historia individual.

El método estadístico dio tan buenos resultados para las ciencias sociales que luego lo aplicaron los físicos, creando así la mecánica estadística, una rama de la física desarrollada alrededor de 1900 por el austriaco Ludwig Boltzmann y el norteamericano J. Willard Gibbs.

Es así que James Clerk Maxwell propuso en 1872 la introducción en la física del cálculo de probabilidades para sistemas de gran número de componentes, y escribió: "hemos hallado un nuevo tipo de regularidad, la regularidad de los promedios".

Los juegos de azar y las predicciones

La teoría de probabilidades se originó en los juegos de azar: Laplace establece en su libro que:

La probabilidad de un evento es la cantidad de veces en que aparece, dividido por el total de los que podrían ocurrir suponiendo que todos ellos sean igualmente posibles.

Así por ejemplo, un dado de seis caras nos da una probabilidad de 1/6 para que caiga con la cara del 2 hacia arriba, y la misma probabilidad vale para las otras cinco caras.

Si se arroja un dado un gran número de veces y se hace la estadística de cuántas veces aparece cada uno de sus seis números, se comprobará que cuanto mayor sea el número de tiradas tanto más cerca se estará del número 1/6. Pero no se sabe antes de arrojar el dado qué cara quedará esta vez arriba y ésta es, por supuesto, la razón de la existencia de los juegos de azar.

En teoría, si se conociesen las fuerzas aplicadas al lanzar el dado, los rozamientos, resistencia del aire, etcétera, se podría predecir cómo caerá, pero es imposible disponer de todos los datos necesarios, y, por lo tanto, los jugadores podrán seguir disfrutando de la emoción de apostar sin saber qué les deparará el azar.

De modo que cuando se trata de sistemas dinámicos en los que no se pueden aplicar las ecuaciones de Newton para precisar el comportamiento de cada caso individual, lo más cercano a una predicción es establecer la probabilidad de que ocurra un evento determinado.

Se debe responder ahora a un nuevo tipo de pregunta. No ya: ¿cuál es la velocidad de esta partícula?, sino: ¿qué probabilidad tengo de encontrar partículas cuya velocidad esté entre tal y cual valor?

El método se aplicó en la física inicialmente en el estudio de los gases, lo que es lógico por la analogía a la que nos hemos referido entre la relación de las moléculas con el gas y la de los individuos con una sociedad. Este concepto fue introducido en la termodinámica, que surgía como el desarrollo científico de los estudios sobre el calor.

A fines del siglo XIX existían entonces dos enfoques científicos para la formulación matemática de los fenómenos naturales: el análisis mediante las ecuaciones diferenciales para sistemas con pocos componentes, y el análisis estadístico para los sistemas con un número elevado de componentes.

Pero en la comunidad científica, la distinción jerárquica entre ambos enfoques era bien clara: la jerarquía máxima correspondía a la primera de estas visiones, ya que expresaba el enfoque que hemos llamado platónico, de que la naturaleza está regida por leyes eternas escritas en lenguaje matemático, mientras que la segunda debe su existencia a la ignorancia que surge de nuestras limitaciones humanas, la que se compensa par-

cialmente mediante el uso de las probabilidades, pero que inevitablemente irá viendo achicar su campo de aplicación a medida que avance el conocimiento, gracias a ese progreso continuo e inevitable que fue una creencia básica en Occidente a partir del Iluminismo.

Como vimos, tal visión cambió radicalmente en el transcurso de este siglo, siendo Henri Poincaré el primero que percibió las características esenciales del nuevo enfoque. Al igual que Maxwell, advirtió que sistemas simples, de pocos componentes y que, por lo tanto, están en la primera de las categorías que hemos descrito, pueden comportarse no obstante caóticamente y requerir entonces de métodos estadísticos para su descripción.

Poincaré advirtió esto al examinar el caso de un sistema dinámico muy simple, formado por sólo tres cuerpos que se atraen por acción de la fuerza de la gravedad, cuando uno de ellos es muy pequeño con relación a los otros dos. Trató de determinar cómo se movería y de representar gráficamente su evolución como una trayectoria en un espacio matemático llamado "espacio de las fases" (sobre este espacio volveremos más adelante). La estructura de esta trayectoria, llamada homoclínica, resultó ser tan extraordinariamente complicada y alejada de la intuición que Poincaré desistió de intentar dibujarla y escribió en sus *Nuevos métodos de mecánica celeste:*

> Intentemos hacernos una idea de la figura formada por estas dos curvas y sus infinitas intersecciones, cada una de las cuales corresponde a una solución doblemente asintótica. Dichas intersecciones forman una especie de entramado, de tejido, de red de mallas infinitamente finas. Ninguna de esas curvas se ha de cortar a sí misma; además, se ha de plegar sobre sí misma de un modo muy complejo para cortar infinitas veces todas las mallas de la red.
>
> Sorprende la complejidad de esta figura que ni siquiera intento dibujar. Nada más indicado para poder hacernos una idea de la complejidad del problema de tres cuerpos y, en general, de todos los problemas de la Dinámica en los que no hay una integral uniforme.

Esta inesperada complejidad, que asombró tanto al genial matemático, es la que hoy se estudia en los sistemas dinámicos con estructuras como las homoclínicas, las heteroclínicas y

también en los atractores extraños, representación fundamental para el examen del caos determinista.

La obra de Poincaré ha sido básica para el estudio de los sistemas dinámicos y lo consagra como el fundador de los métodos que hoy permiten abordar las matemáticas del caos determinista. Sin embargo, hubo un periodo de más de sesenta años en los que sus aportes para funciones no lineales fueron prácticamente ignorados, y es recién a partir de los trabajos de A. Kolmogorov y V. Arnold en Rusia, S. Smale en Estados Unidos, D. Ruelle y R. Thom en Francia, que se vuelve a trabajar seriamente en este campo.

A pesar de que Poincaré fue un visionario, no avanzó en el estudio de estos sistemas, lo que se puede atribuir a dos motivos principales. El primero es que en su época los cálculos numéricos se hacían manualmente, lo que imposibilitaba el tratamiento numérico de los sistemas de ecuaciones no lineales, que debieron esperar a la aparición de las computadoras. El otro motivo es su actitud filosófica, que compartía con la mayoría de los matemáticos y físicos de la época, y que se refleja claramente en un escrito de Poincaré donde comenta la existencia de ciertas funciones matemáticas que no responden a las exigencias clásicas de ser continuas y derivables: "La lógica a veces engendra monstruos. Desde hace medio siglo se han visto surgir una multitud de funciones raras que parecen esforzarse en asemejarse lo menos posible a las honestas funciones que sirven para cualquier cosa. No más continuidad, no más derivadas, etcétera."

¡Cuál sería el asombro de Poincaré ante el atractor que Lorenz descubrió al modelizar fenómenos meteorológicos! No por el aspecto matemático, ya que, como vimos, comprendía perfectamente la imposibilidad de hacer previsiones a largo plazo, sino porque ese atractor extraño, que permite graficar las características esenciales del sistema dinámico de la atmósfera, se engendró utilizando los monstruos matemáticos "raros" de los que tanto desconfiaba. Él había llegado a vislumbrar el universo fascinante de las matemáticas de lo imprevisible, pero retrocedió ante esa falta de regularidad, de continuidad, que le producía tanto desagrado.

Una consecuencia de esta visión fue que los científicos imbuidos de ella han tendido a ignorar ciertos campos de la in-

vestigación, como el que alberga a los "monstruos" que mencionaba Poincaré (por ejemplo, las curvas sin tangentes y todos los algoritmos que hoy llamaríamos "caóticos").

Para poder considerar de real valor científico al caos determinista, hay que renunciar a la creencia en una jerarquía donde la cima está ocupada por las formas perfectas (círculo, esfera, etcétera). Pues, ¿por qué aceptar que un círculo es superior a una figura compleja, como lo es un fractal o cualquier elemento de la naturaleza? Como dijera el matemático B. Mandelbrot, "las montañas no son conos, ni las nubes son esferas, ni tampoco los ríos ni los rayos van en línea recta; en definitiva, las formas que nos rodean a lo largo de nuestra vida, siempre han estado muy alejadas de la simplicidad de lo euclidiano".

Este cambio de valoración tiene un origen cultural y filosófico, y si se pasa esto por alto, se arriesga reducir el estudio moderno del caos al de un mero conjunto de nuevas técnicas.

Un aspecto importante de este nuevo enfoque es el indispensable uso de la computadora, que permite hacer los cálculos y además traducir en imágenes el comportamiento de los sistemas dinámicos.

También en este aspecto hay una clara distinción entre las actitudes de los matemáticos que adhieren a uno u otro enfoque. Así como la utilización de herramientas que no fueran la regla y el compás era rechazada por los geómetras griegos, hoy continúa la resistencia de muchos matemáticos "puros" al uso de las computadoras para las demostraciones matemáticas, basados en el hecho cierto de que el número de decimales de todo resultado numérico que puede manejar una computadora es limitado.

Otro aspecto nuevo es la introducción deliberada de lo aleatorio en muchos de los cálculos, por ejemplo, mediante series de números generados al azar, con el objeto de modelar fenómenos naturales que tengan componentes imprevisibles.

El uso de las probabilidades había sido iniciado, como vimos, en el pasado por Quetelet en las ciencias sociales y por Maxwell en la teoría cinética de los gases, pero se lo consideraba como un índice de ignorancia, que señalaba los límites de las zonas donde están los temas que la verdadera ciencia había logrado esclarecer; y en esas zonas lo aleatorio, las probabili-

dades sólo tenían cabida mientras no se pudiera aplicar la verdadera ciencia.

Pero en el primer cuarto de este siglo, la mecánica cuántica mostró que el concepto de probabilidad y los métodos estadísticos son esenciales para la formulación de las leyes físicas, al menos en la escala atómica, con lo cual se comenzó a apreciar su significado conceptual.

Los matemáticos y físicos tenían presente que hay cierta cuota de desorden en la naturaleza, pero no creían que su estudio fuera digno de constituir una verdadera ciencia.

Ahora, en cambio, el caos está plenamente reconocido y se acepta que además de los fenómenos que exhiben orden y regularidad, hay un vasto universo de fenómenos desordenados, irregulares, que no son reducibles a las formas puras, y que pueden también aparecer insospechadamente en sistemas muy simples, como el formado por tres cuerpos.

Los fenómenos caóticos pueden ser estudiados científicamente, pues aunque no hay posibilidad alguna de prever el comportamiento detallado de sus componentes individuales, sí se puede hacer una predicción cualitativa de la evolución del sistema en su conjunto, y también se pueden buscar las condiciones para que un sistema dinámico que está en estado de orden pase al comportamiento caótico y viceversa.

Como se puede ver, algunas de las ideas más interesantes de las ciencias actuales están referidas a estos temas, los que han obligado a precisar los verdaderos alcances del determinismo, de nuestra capacidad de predecir el futuro y del verdadero significado de las leyes naturales. Sólo el tiempo nos dará una idea exacta de la verdadera trascendencia de estos cambios sobre el método y la filosofía de la ciencia.

Pasaremos ahora a examinar las características de los sistemas dinámicos que pueden presentar un comportamiento caótico.

En la naturaleza hay muchos procesos cíclicos

Con respecto a los procesos dinámicos que se observan en la naturaleza, cuando se les quiere estudiar se debe subrayar la universalidad de los que son periódicos o de oscilación, procesos ubicuos en la física, la astronomía y la biología, ya sea en la

estructura de las nubes en la atmósfera, los remolinos en un río torrentoso, el sonido melodioso de un violín o el flujo de energía eléctrica en un circuito electrónico, y van desde el conocido movimiento de los péndulos y de las órbitas de los planetas a los complejos ritmos biológicos: fluctuaciones en los ciclos de reproducción de una población animal, respiración, ritmo cardiaco, alternancia de vigilia y sueño, procesos neurofisiológicos, etcétera. En todos ellos se halla esta característica de periodicidad en el comportamiento.

Como son legión los dispositivos y fenómenos que presentan este comportamiento oscilatorio, es natural que el oscilador suscite un creciente interés científico. Pero ahora vamos mucho mas allá, pues la conclusión que se extrae de la visión anterior es que las propiedades de los osciladores pueden aplicarse al conjunto de los procesos dinámicos.

En efecto, se puede describir matemáticamente cualquier proceso que fluctúa en el tiempo como la suma algebraica de

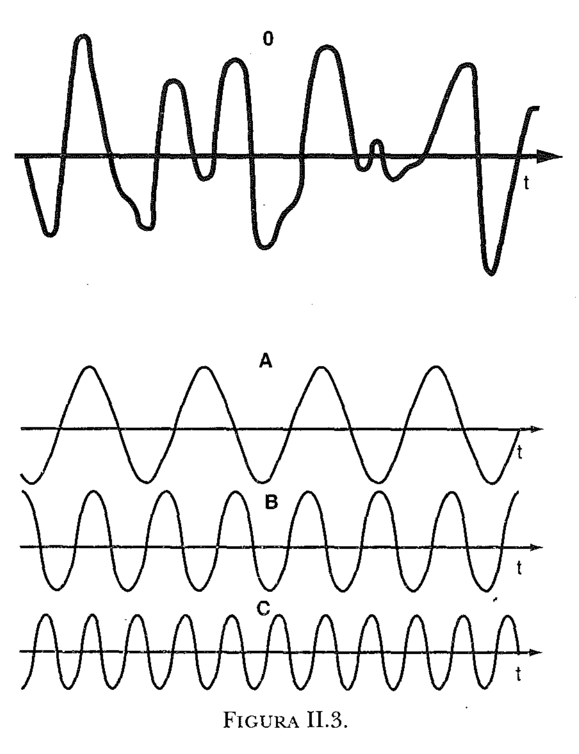


FIGURA II.3.

un conjunto de oscilaciones periódicas, por un método llamado análisis de Fourier.

Como se puede ver en la figura II.3, si se grafica la variación en el tiempo del proceso *O* que queremos analizar, se obtiene una curva irregular, que no se repite en el tiempo. Pero Fourier demostró que se le puede considerar como la resultante de sumar varias curvas periódicas regulares, como las *A, B* y *C,* y, por lo tanto, toda teoría de procesos dinámicos puede requerir la aplicación del concepto de los osciladores, que combinados dan cuenta de cualquier variación en el tiempo.

Es por este motivo que, como iniciación al estudio de los sistemas dinámicos examinaremos en detalle el comportamiento de un oscilador elemental, tal como el péndulo simple, y luego veremos qué ocurre cuando se combinan dos o más de estos osciladores elementales para formar un sistema dinámico.

III. Los péndulos simples pueden ser muy complejos

ANALIZAREMOS aquí en qué condiciones será caótico el movimiento de un sistema tan poco complicado como puede serlo el formado por un par de péndulos.

El péndulo es un sistema dinámico que repite su comportamiento a intervalos regulares que llamamos periodos.

Ha sido estudiado por lo menos desde la época de Galileo, de modo que se podría suponer que ya no tendría por qué proporcionarnos ninguna sorpresa. Por otra parte, desde hace siglos el péndulo constituye el paradigma de la previsibilidad y de la regularidad. Antes de la utilización de los osciladores de cuarzo, los relojes eran regulados por péndulos.

SISTEMAS DINÁMICOS CONSERVATIVOS O DISIPATIVOS

Se debe ante todo distinguir entre sistemas *dinámicos conservativos,* que son aquellos en los que la energía del sistema se man-

tiene constante porque hay ausencia de frotamiento o fricción interna, y aquellos en los que debido al frotamiento hay una disminución continua de energía, llamados *sistemas disipativos*.

A los primeros se los suele denominar también "sistemas hamiltonianos", ya que resulta muy fructífero describir su comportamiento con una función matemática desarrollada por W. Hamilton que utiliza como variables las posiciones y, en lugar de las velocidades, los impulsos (producto de velocidad por masa).

Ejemplos de sistemas hamiltonianos son el sistema solar y el plasma en un acelerador de partículas, y de los disipativos la atmósfera terrestre, los océanos, los organismos vivientes y todas las máquinas.

Examinemos las características de los sistemas hamiltonianos, comenzando con el caso más sencillo, o sea el del péndulo ideal, que nadie hallará en ningún laboratorio, pero que permite fijar las ideas esenciales para estudiar los osciladores.

Este péndulo ideal se mueve en un espacio de dos dimensiones, o sea, sobre un plano vertical, el hilo del que cuelga es rígido y no tiene peso, no fricciona en el pivote y está en el vacío, por lo tanto no hay resistencia del aire a su movimiento.

Se trata entonces de un sistema hamiltoniano simple, y es posible describir matemáticamente su movimiento mediante la ecuación de Newton: una ecuación diferencial que vincula la derivada segunda del ángulo que forma el hilo con la vertical, respecto del tiempo (o sea la variación en el tiempo de la velocidad con que cambia el ángulo), con otros parámetros como la longitud del hilo y la aceleración de la gravedad.

Si se quiere representar gráficamente su movimiento, necesitaremos calcular para cada momento su ángulo respecto de la vertical y su velocidad, que llamaremos θ (theta) y v respectivamente. Deseamos saber cómo varían ambos a medida que transcurre el tiempo y para ello nos será de suma utilidad el uso del espacio de las fases.

El espacio de las fases y los péndulos acoplados

Este es un espacio matemático abstracto, que no se debe confundir con aquel en el que realmente se mueven los compo-

nentes del sistema, pero que contiene en sus formas geométricas una información concreta: las variables que describen el movimiento del sistema dinámico.

Se utilizará aquí un método que es exactamente el opuesto al que utilizó René Descartes cuando concibió el uso de coordenadas.

Descartes descubrió cómo transformar la geometría en números al imaginar el espacio como una inmensa grilla, el sistema de coordenadas cartesianas, de forma que la posición de cualquier punto en el espacio esté definida mediante números que miden su distancia a estas coordenadas de referencia. Por lo tanto, toda forma geométrica se puede expresar en números mediante una ecuación matemática que la refiera a las coordenadas cartesianas.

Al introducir ahora el espacio de las fases hacemos al revés: transformamos números en formas geométricas pretendiendo que estos números sean coordenadas en dicho espacio imaginario.

La ventaja de proceder así es que basta con observar esa forma geométrica para saber cómo varía el comportamiento del sistema a medida que transcurre el tiempo. Para ello se utilizan como ejes de coordenadas las variables dinámicas del sistema, o sea aquellas magnitudes que van cambiando con el tiempo, como pueden ser la velocidad del péndulo y su ángulo respecto de la vertical. Para un momento inicial, el péndulo, entonces, queda representado por un punto en el gráfico del espacio de las fases que nos indica su velocidad y ángulo. Un tiempo después tendrá otra posición y velocidad, y a esto le corresponde un punto distinto, y así podremos hacer la historia del péndulo mediante puntos sucesivos que trazan una trayectoria. De esta forma, la dinámica cambia de estudiar largas listas de números a visualizar cómo va evolucionando con el tiempo una figura geométrica.

Si el resultado después de un tiempo es un único punto fijo, el sistema está estático, no evoluciona. Si hay una curva y ésta es cerrada, esto indica que el sistema repite periódicamente su comportamiento; si es una curva abierta, se deberá examinar sus características para ver si hay o no regularidades subyacentes.

Fue el gran matemático Henri Poincaré quien tuvo la brillante idea de proponer este método, por el que la dinámica se

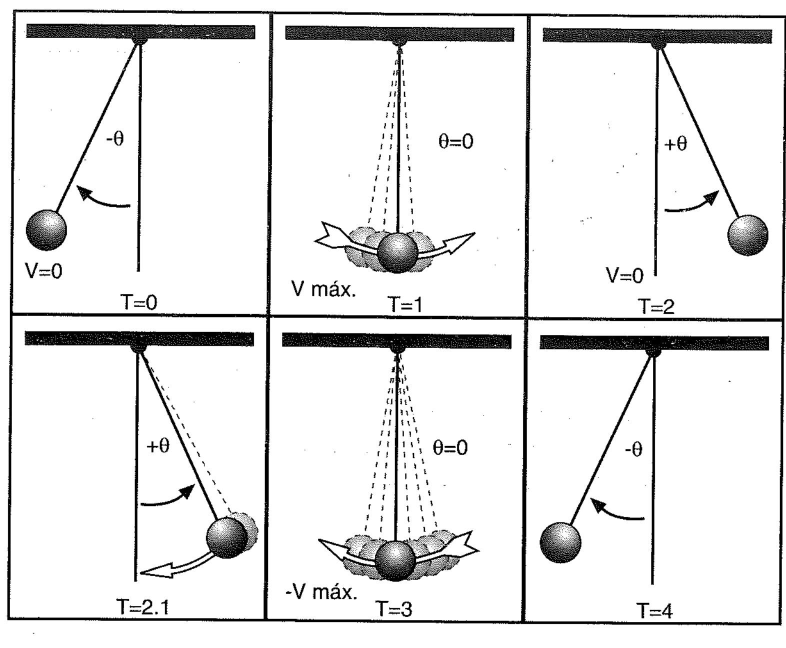
puede hacer visual. Los investigadores intentan descubrir las características generales de un sistema, que se aprecian mejor si se observan las formas que aparecen en el espacio de las fases.

En general, esta manera de representar un sistema dinámico tiene entre sus ventajas el que las coordenadas del espacio de las fases pueden representar cualquier característica del sistema dinámico que varíe en el tiempo, como, por ejemplo, las señales eléctricas del corazón, la población de abejas en una colmena, el valor del dólar, etcétera.

Un principio general de las trayectorias en el espacio de las fases es que ninguna puede tocar a otra como consecuencia del carácter determinista de esta descripción: si se intersectaran dos trayectorias en un punto, a partir del mismo habría dos curvas diferentes, que corresponderían a dos soluciones distintas de las ecuaciones diferenciales del sistema, o sea dos comportamientos distintos al mismo tiempo.

Así, si estuviésemos representando como sistema dinámico a un automóvil, si dos trayectorias se tocasen en un punto indicarían que tenemos a un mismo vehículo moviéndose simultáneamente a, por ejemplo, 30 y 90 km por hora, lo que obviamente, se opone al carácter no ambiguo, determinista, de estos fenómenos.

Para representar el comportamiento del péndulo ideal en el espacio de las fases, comencemos por dibujar dos ejes de referencia, o coordenadas, uno horizontal θ para los ángulos, y otro vertical v para las velocidades. Marquemos ahora el camino o trayectoria del péndulo en este mapa como en la figura III.1*b* de la página siguiente. Supongamos que a partir de un instante inicial en que le damos un impulso, medimos cada décimo de segundo el ángulo y velocidad, y marcamos el punto correspondiente en la figura III.1*b*. Como podemos ver en la figura III.1*a*, en el tiempo inicial $T = 0$, el péndulo forma un ángulo $-\theta$ respecto de la vertical, situación que se representa con el punto $T = 0$ en la figura III.1*b*. Al liberarlo se moverá hacia la derecha con una velocidad creciente, que será la máxima cuando pase por la vertical en el instante $T = 1$, momento en el que $\theta = 0$, y esto se representa en la figura III.1*b* con el punto $T = 1$. Al llegar al máximo desplazamiento a la derecha, para $\theta = +\theta$, su velocidad se habrá reducido a cero, y esto corresponde al punto $T = 2$ en la figura III.1*b*.


-θ
V=0
T=0
θ=0
V máx.
T=1
+θ
V=0
T=2
+θ
T=2.1
θ=0
-V máx.
T=3
-θ
T=4
A

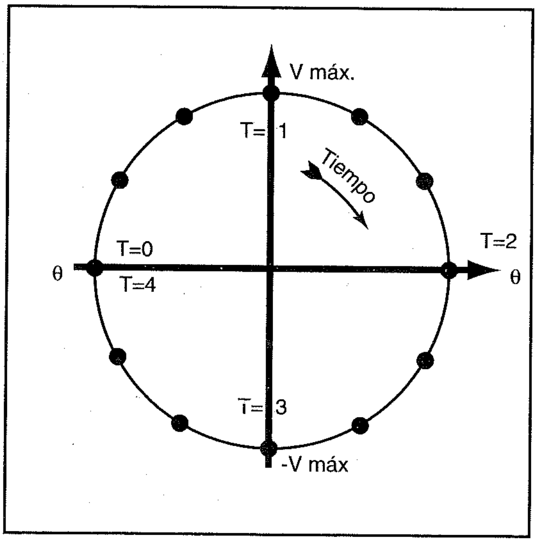

V máx.
T=1
Tiempo
T=0
θ
T=4
T=2
θ
T=3
-V máx.
B

FIGURA III.1.

Continuando este procedimiento se obtendrá un conjunto de puntos, que trazan la trayectoria dinámica del oscilador, trayectoria que representa el movimiento entero del péndulo en un ciclo.

Dado que el camino se repite ciclo tras ciclo, el mapa para este péndulo simple es una única trayectoria cerrada, también llamada órbita, por analogía con el movimiento de los planetas.

Si le damos al péndulo un mayor impulso inicial, el ángulo máximo será mayor. De hecho, en un único gráfico podemos representar el movimiento del mismo péndulo con diferentes velocidades iniciales, y para cada una de ellas se tiene una órbita distinta. Ésta es una de las características de los sistemas conservativos o hamiltonianos.

Se obtiene así una familia de curvas, que puedan cubrir el plano θ,v (figura III.2). Para el péndulo ideal, y para ángulos pequeños de alejamiento de la vertical, estas curvas son círculos concéntricos, que corresponden a la solución más simplificada de la ecuación diferencial, llamada en este caso "ecuación del oscilador armónico simple", y que es una ecuación lineal.

Como puede verse, hay un punto central A, en el cruce de los ejes, es decir, para θ y v de valor cero. Éste representa al

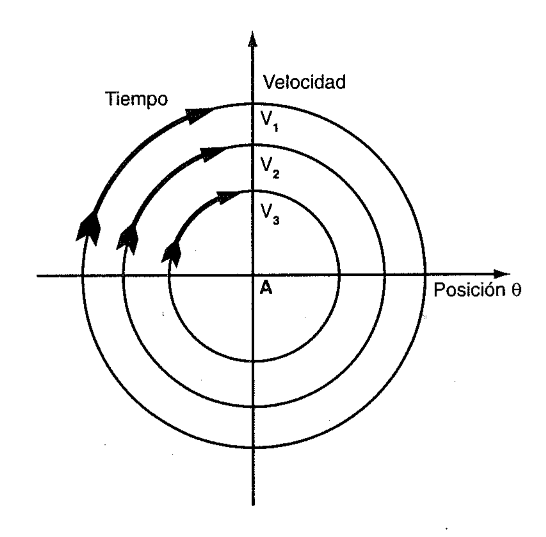


FIGURA III.2.

péndulo cuando tiene velocidad cero y descansa sobre la vertical, o sea que está en reposo.

Si ahora apartamos mucho de la vertical al péndulo, la relación entre la fuerza que lo mueve y el ángulo se describe mediante una ecuación diferencial mucho más complicada, y que es no lineal. Su solución se grafica en la figura III.3. La familia de posibles trayectorias se asemeja ahora a un ojo. El punto central *A* sigue representando al péndulo inmóvil (velocidad y ángulo cero). Las elipses concéntricas *B* corresponden a ciclos del péndulo cada vez más alejados de la vertical, como un columpio al que se le da un impulso cada vez mayor, hasta que forma 90 grados con la vertical, y luego comienza a subir más allá del pivote.

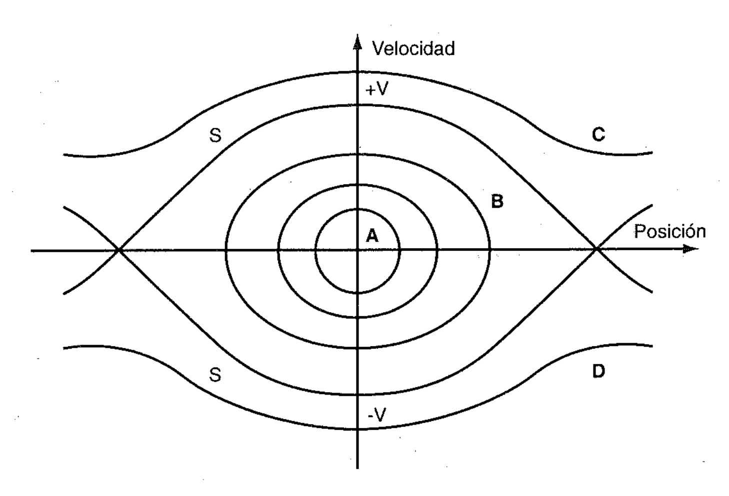


Figura III.3.

¿Qué pasa cuando recibe un envión tal que sobrepasa los 180 grados?

Como sabemos, no oscilará, sino que girará en círculo en uno u otro sentido, como una hélice.

Esto se representa en el espacio de las fases con las familias de curvas indicadas con *C* y *D*. Como puede verse, las *C* tienen velocidad positiva, es decir, representan giros completos en una dirección, por ejemplo en el mismo sentido que las agujas

del reloj, y las *D* representan el movimiento en el sentido contrario, lo que se indica con una velocidad de signo negativo.

Este método de representar el comportamiento del sistema dinámico en el espacio de las fases nos permite apreciar las características esenciales de un vistazo: si el gráfico es un punto, el sistema está quieto, si hay círculos concéntricos, está oscilando con poca amplitud; si hay elipses, las oscilaciones son más amplias; si está en las zonas *C* o *D*, está rotando en lugar de oscilar.

Las dos curvas *S* que forman el límite entre las regiones *B* de oscilación y *C, D* de rotación se llaman "separatrices" y corresponden a las posiciones del péndulo en que está suspendido exactamente sobre la vertical en su posición más alta (figura III.3), o sea que tiene la máxima inestabilidad. Si está en esa posición caerá rotando ya sea en un sentido o el opuesto, y adquirirá una velocidad cada vez mayor, hasta pasar por el punto más bajo de la vertical y ascender luego con velocidad decreciente hasta volver al punto más alto sobre la vertical. Sobre la curva separatriz, la energía total de que dispone el péndulo es exactamente igual a la que necesita para salir de ese punto más alto sobre la vertical y volver a alcanzarlo.

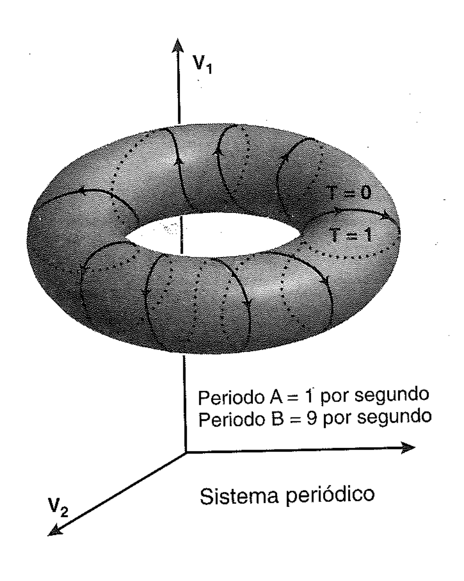
¿Qué pasa con un sistema hamiltoniano más complicado, formado por dos péndulos ideales acoplados (*A* y *B*), es decir que se influencian mutuamente en su movimiento?

Cada uno de los péndulos tiene su propio periodo de oscilación, pero éste es ahora afectado por el del otro. Si ignoramos al péndulo *A*, entonces el movimiento del péndulo *B* trazará una curva cerrada en el espacio de las fases bidimensional. Si ignoramos al péndulo *B*, el movimiento de *A* trazará otra curva cerrada en un espacio bidimensional diferente. Pero si los dos péndulos interactúan, ya no son independientes y para representar las trayectorias los dos espacios planos deben combinarse en uno cuya dimensión debe crecer por lo tanto de dos a tres.

Supongamos que el periodo de *A* es, por ejemplo, nueve veces mayor que el de *B*. Si *A* fuese independiente de *B*, se le podría representar en la figura III.4 como una curva cerrada sobre un plano horizontal, y a *B* sobre un plano perpendicular al horizontal. Pero cuando sus movimientos se acoplan, esto se representa en el espacio de las fases combinando ambas curvas

cerradas: a medida que *A* se va desplegando horizontalmente, la curva *B* la va desviando del plano horizontal, en un movimiento comparable al de arrollar una soga alrededor de un neumático. El resultado de un círculo enrollándose alrededor de otro es la creación de una figura en forma de anillo solenoide, sobre la superficie de lo que los matemáticos llaman toro (figura III.4). Aquí podemos considerar que el ciclo *A* es el eje del toro, y el *B* es, por lo tanto, un ciclo perpendicular a dicho eje.

FIGURA III.4.



Ahora veamos el toro de tres dimensiones con más detalle.

Si los periodos o frecuencias de dos péndulos acoplados están en una relación simple, por ejemplo si uno tiene un periodo nueve veces mayor que el otro, la relación es 9/1, y la línea que da vueltas sobre la superficie del toro va trazando un solenoide que pasa siempre sobre los mismos puntos del toro no importa cuántas revoluciones realicen estos péndulos combinados, lo que demuestra que el sistema dinámico es exactamente periódico. Así, en la figura III.4, el punto inicial para $T = 0$ y el final al cumplirse un periodo, $T = 1$, coinciden.

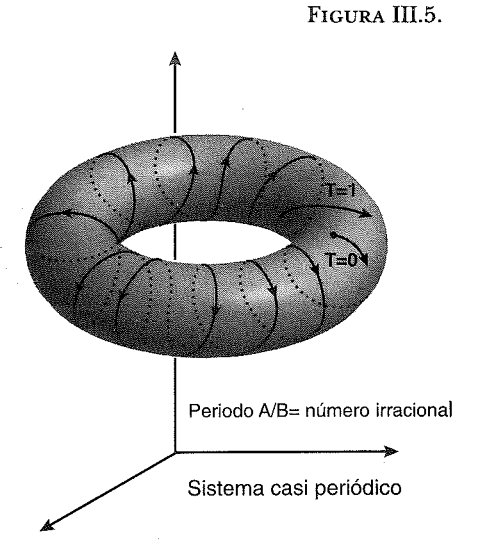
Pero ¿qué ocurre cuando los periodos de los osciladores acoplados son inconmensurables, o sea que el cociente de esos periodos es un número irracional? Un número irracional no puede ser escrito como una razón y su expresión decimal contiene un número infinito de términos sin una pauta repetitiva.

Si el sistema acoplado tiene una relación irracional entre periodos, la curva en el espacio de las fases se irá enrollando alrededor del toro pasando en cada vuelta por puntos diferentes, como se ve en la figura III.5, donde el punto inicial $T = 0$ y el que corresponde a un periodo, $T = 1$, no coinciden, de modo que la curva con el transcurso del tiempo pasará por

todos los puntos de su superficie hasta cubrir totalmente el toro, y nunca se repetirá a sí mismo. Un sistema con estas características se llama casi periódico.

Los matemáticos son capaces de trabajar con toros de cualquier número de dimensiones. Lo que equivale a que es perfectamente posible juntar más de dos osciladores y representar su movimiento combinado en la superficie de un toro multidimensional.

FIGURA III.5.



SECCIONES DE POINCARÉ Y ESPACIOS MULTIDIMENSIONALES

Si bien no hay ninguna restricción en principio al número de dimensiones del espacio de las fases, evidentemente son mucho más fáciles de visualizar las formas con solamente tres o dos dimensiones (volúmenes o superficies).

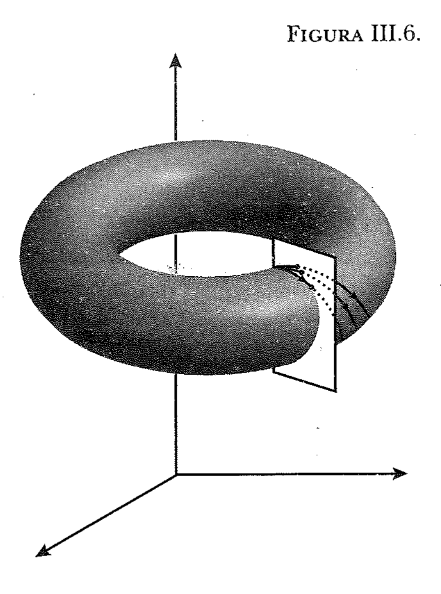
Hay un método, concebido por H. Poincaré, para visualizar las propiedades esenciales de trayectorias complicadas de espacios de tres o más dimensiones, que consiste en rebajar en uno ese número de dimensiones.

Consideremos el ejemplo de las trayectorias que rodean el toro de un sistema biperiódico y que forman la superficie de un solenoide tridimensional.

Cortemos ahora el toro con un plano transversal (figura III.6) y marquemos sobre él los puntos donde la trayectoria intersecta el plano. Como la trayectoria es periódica, se marcará un punto por vuelta, de modo que después de un tiempo suficientemente largo se tendrá un verdadero mapa sobre el plano, lo que resulta muy ventajoso en la práctica, por la simplificación que significa el rebajar en uno el número de dimensiones, y además porque se ha pasado de la descripción continua

en el tiempo de la trayectoria en el espacio de las fases, a tomar solamente los datos de movimiento cada vez que la trayectoria atraviesa esa sección, y eso implica que es necesario manejar un número de datos mucho menor.

FIGURA III.6.



¿Qué nos puede decir la sección de Poincaré para este sistema biperiódico?

Si la relación de frecuencias es un número racional, la curva está fija sobre el toro, cada vuelta se superpone a la anterior, de modo que en la sección aparecen solamente los correspondientes puntos aislados cuyo número y posición dependen de la relación de periodos.

Si, en cambio, el sistema es casi periódico, con una relación de frecuencias que es un número irracional, la curva pasará por un punto distinto en cada vuelta, cubriendo toda la superficie del toro con el tiempo, de modo que en la sección de Poincaré se tiene una curva cerrada.

El análisis de sistemas de osciladores más complicados requiere la introducción de un espacio de las fases de más dimensiones, ya que como hemos visto, el número de dimensiones depende de la cantidad de variables independientes del sistema, que pueden ser la velocidad o el impulso, la posición, o algunas otras características dinámicas que definan el comportamiento de cada uno de los componentes.

Para poder encarar estos conceptos de espacio multidimensional, cruciales para el estudio de los sistemas complejos, se requiere hacer una generalización de la geometría de coordenadas.

Decimos que vivimos en un espacio tridimensional, ya que nuestro movimiento en el espacio tiene tres grados de libertad: podemos hacer tres tipos de movimiento que tengan direcciones perpendiculares entre sí (izquierda-derecha, delan-

te-detrás, arriba-abajo), y cualquier punto del espacio puede ser alcanzado combinando esos tres tipos posibles de movimiento, de modo que su posición puede ser indicada mediante tres números que llamaremos coordenadas *x, y, z* del punto, y que dan las distancias del punto a una referencia en esas tres direcciones perpendiculares.

También podemos referirnos a un espacio abstracto de cuatro dimensiones, con cuatro coordenadas *w, x, y, z,* a uno de cinco dimensiones, con coordenadas *v, w, x, y, z,* y así sucesivamente, siempre y cuando tengamos en cuenta que ya no nos estamos refiriendo al espacio físico tridimensional en el que vivimos y nos movemos, sino a un espacio matemático. Éste resulta de enorme utilidad cuando se trata de comprender las matemáticas de muchas variables.

En todo problema, sea de física, biología, economía, cualquier magnitud significativa puede ser considerada, y visualizada, como una dimensión del problema. Un economista puede trabajar con un "espacio" multidimensional con variables índice de costo de vida, costo de la vivienda, valor del dólar, precio del petróleo, trimestres de la última década, etcétera.

Un físico puede estudiar un sistema dinámico formado por tres cuerpos, por ejemplo, donde a cada uno le corresponden las tres coordenadas de posición *x, y, z* más las tres coordenadas de velocidad o de impulso, o sea un total de 18 coordenadas, de modo que está tratando con un espacio de 18 dimensiones.

Nada nos impide continuar aumentando el número de componentes del sistema, de modo que podemos decir que, en general, un sistema dinámico con *n* variables independientes —*n* grados de libertad— se puede representar en un espacio de *n* dimensiones.

En general, esto es válido para los sistemas ordenados y estables que, aunque estén formados por un gran número de componentes, y que por lo tanto se los debería representar en un espacio de las fases de gran número de dimensiones, en la práctica se mueven en un muy pequeño subespacio de este vasto espacio multidimensional que representa un estado físico en todos sus menores detalles, y cuyo volumen llamaremos *H*. Así un cuerpo sólido, por ejemplo, una roca, si bien está formado por una enorme cantidad de moléculas, como las mis-

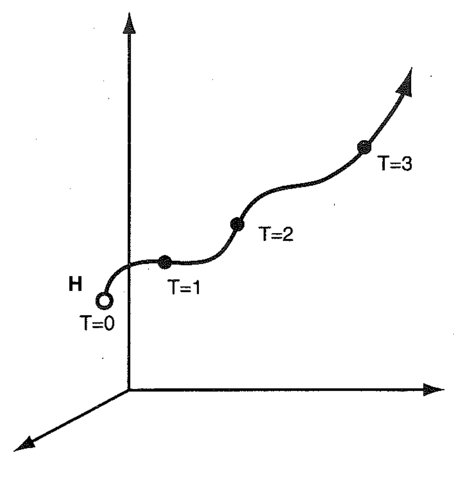


FIGURA III.7.

mas están rígidamente ligadas entre sí se mueven todas al unísono, y basta con representar el movimiento de un único punto: el centro de masa de la roca.

La evolución del sistema con el tiempo se representa con la trayectoria de *H* en el espacio de las fases (figura III.7), donde se marcaron los puntos que corresponden a los estados para los tiempos $T = 1$, $T = 2$, $T = 3$, etcétera.

Un sistema dinámico de comportamiento ordenado puede, si se alteran sus características, pasar a tener un comportamiento caótico, y también puede ocurrir el proceso contrario.

¿Es posible representar esos cambios en el espacio de las fases? La respuesta es afirmativa: como veremos más adelante, el estudio de la transición de un sistema dinámico del orden al caos es, en cierto sentido, el análisis de cómo un movimiento que puede ser muy simple, limitado y repetitivo se quiebra en cierto punto crítico, desarrollando un nuevo comportamiento que corresponde a un desplazamiento de la trayectoria del sistema a zonas mucho más vastas del espacio de las fases.

Ahora podremos visualizar la diferencia entre procesos predecibles o procesos caóticos. Representemos (figura III.8) la evolución de un sistema dinámico de comportamiento predecible como una trayectoria indicada por 1 en el espacio de las fases. Si variamos ligeramente las condiciones iniciales, tenemos la trayectoria *2*, que se mantiene cercana a la 1, indicando que el comportamiento es prácticamente el mismo (figura III.8*a*). En cambio, en un proceso caótico, las trayectorias 1 y 2 que inicialmente estaban próximas se alejan cada vez más con el tiempo, señalando la divergencia creciente de los comportamientos (figura III.8*b*).

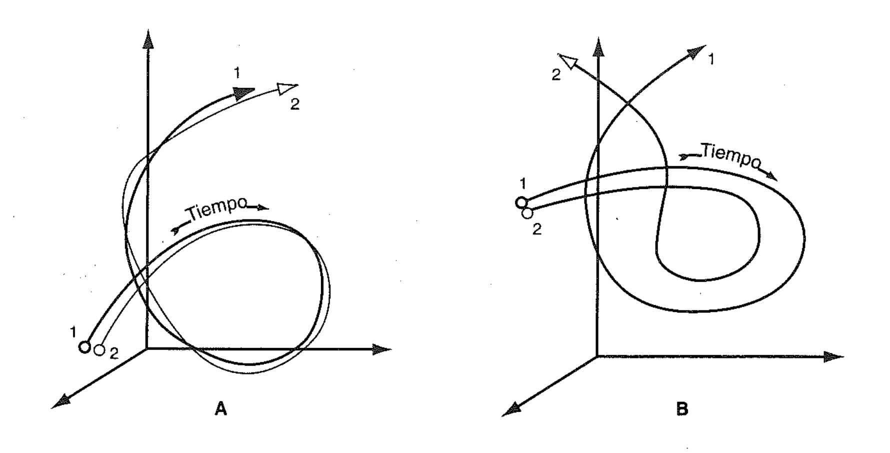


Figura III.8.

Conservación de los volúmenes en el espacio de las fases

Como hemos visto, la energía total de un sistema hamiltoniano es invariable. ¿Cómo se expresa esto en el espacio de las fases?

Consideremos la representación en el espacio de las fases de la evolución del sistema dinámico. Vimos que hay una región de volumen *H* para representar ese sistema, y que se va desplazando en el espacio de las fases, trazando así una trayectoria que expresa su evolución en el tiempo.

En el siglo pasado, el matemático J. Liouville demostró que para todo sistema hamiltoniano el volumen de esta región *H* se mantiene constante en el tiempo, tal como si se tratase del movimiento de una gota de un líquido que no es posible comprimir.

Esta propiedad de los sistemas hamiltonianos es mucho más restrictiva que la simple conservación de la energía o que la reversibilidad en el tiempo de las ecuaciones de movimiento.

La conservación del volumen de la región en el espacio de las fases puede estar asegurada de dos maneras diferentes: *1)* la región considerada se va desplazando alrededor de la trayectoria, rotando y deformándose en forma periódica, y entonces las trayectorias vecinas se "enrollan" sin apartarse nunca demasiado entre sí; *2)* el volumen *H* se estira con el tiempo en una

dirección, contrayéndose en la dirección perpendicular. Mientras que en el primer caso dos trayectorias inicialmente próximas se mantienen vecinas, en el segundo tienden a alejarse.

Desde el punto de vista dinámico, la diferencia es considerable. En efecto, las trayectorias son estables en el primer caso, inestables en el segundo, pues aquí un débil apartamiento inicial se puede amplificar en el transcurso del tiempo.

Reversibilidad en el tiempo

Otra propiedad importante de las ecuaciones que describen el comportamiento de un sistema hamiltoniano es que el cambio de signo del tiempo, es decir, el reemplazo de $+t$ por $-t$ no tiene incidencia alguna; las ecuaciones son idénticas. O sea que si se filma el movimiento de un péndulo ideal no se puede discernir en qué sentido se pasa la película.

Se dice, en general, que los sistemas conservativos tienen una mecánica reversible.

Como veremos más adelante, la irreversibilidad en el tiempo es característica de los sistemas en los que la energía, en lugar de conservarse, se disipa.

Donde aparece el caos en los péndulos

El estudio del caos determinista comenzó en los años sesenta con los trabajos pioneros de E. Lorenz, D. Ruelle y F. Takens, quienes utilizando las computadoras, que en ese entonces comenzaban a mostrar su fantástica potencialidad, demostraron que aun sistemas dinámicos simples, formados por unos pocos osciladores, podían comportarse de manera imprevisible, caótica.

Es fácil y divertido comprobar esto con un sistema de dos péndulos acoplados—sencillo de construir y hasta adquirible como juguete. En la figura III.9, el sistema consta de un péndulo liviano formado por dos pequeñas esferas unidas por un eje alrededor del cual pueden rotar. Este eje cuelga sobre un péndulo más pesado, que es el que impone la oscilación básica.

Ambos péndulos tienen adosados imanes permanentes, de

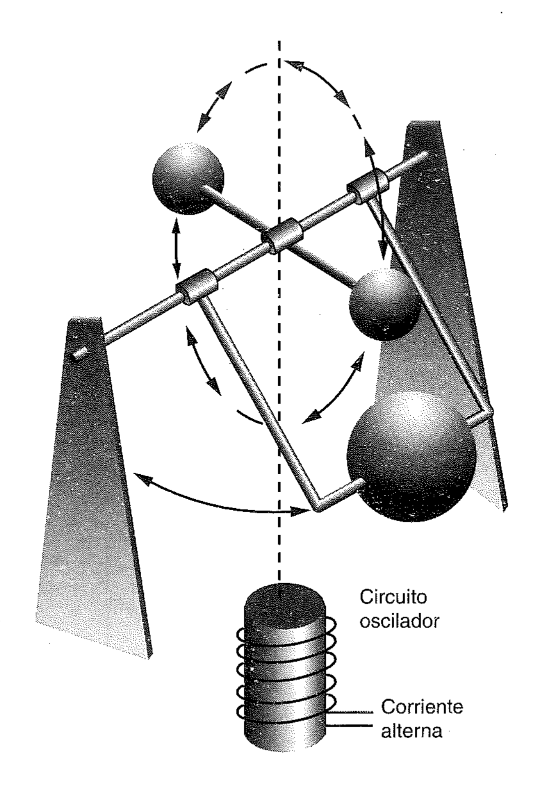


FIGURA III.9.

modo que sus movimientos se acoplan. En la base del sistema hay un pequeño electroimán alimentado por un circuito eléctrico oscilador, que mantiene las oscilaciones del péndulo principal para que éste no se amortigüe (péndulo entretenido).

Una vez que se da el empujón inicial, el péndulo más pesado oscila con la regularidad de un reloj, mientras que cada vez que una de las esferas del otro gira cerca del péndulo grande recibe un envión por la atracción entre los respectivos imanes. Pronto se asistirá a un espectáculo sorprendente: el péndulo liviano hace una extraña danza errática, oscilando por momentos en forma rítmica, para saltar imprevisiblemente a movimientos que son caóticos.

¿Cómo se representará este comportamiento en el espacio de las fases?

Tratemos el caso de los sistemas dinámicos disipativos, que abundan en este mundo, y cuya energía va disminuyendo por fricciones y otros efectos.

Sabemos que si le damos impulso a un péndulo real, oscilará o rotará pero pronto, a diferencia del péndulo ideal que hemos estudiado antes, su movimiento se irá amortiguando cada vez más, hasta que finalmente quedará quieto, si es que no recibe nuevamente energía.

Este comportamiento queda representado como una trayectoria en espiral en el espacio de las fases, que desemboca en el punto *A* para la posición final de reposo (figura III.10).

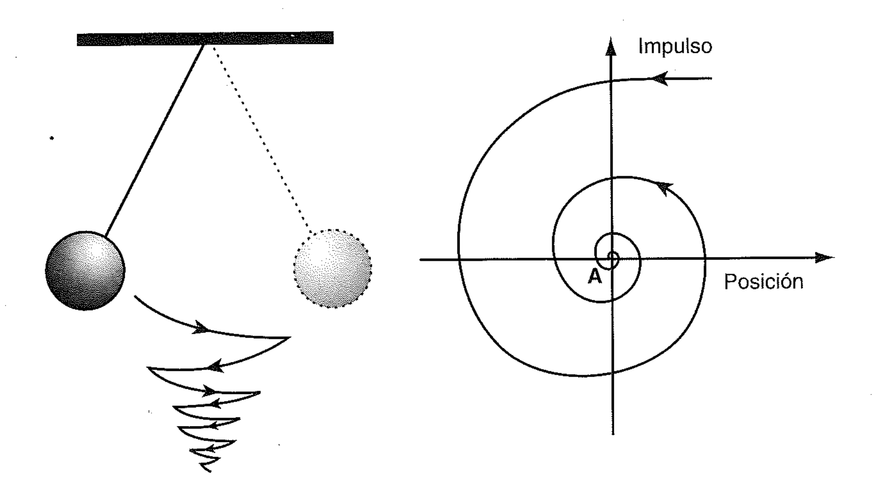


FIGURA III.10.

No importa cuánto impulso inicial recibe el péndulo, en todos los casos la pérdida de energía finalmente lo inmoviliza, es decir, la trayectoria desemboca inevitablemente en el punto de reposo *A*, como si éste atrajera las curvas en el espacio de las fases. De allí el nombre de "atractor" que recibe el punto fijo *A*.

Por supuesto que un reloj a péndulo sería de muy poca utilidad si esta trayectoria desde el primer impulso al reposo se

hiciera en unos pocos minutos, y por ello se han inventado diversos mecanismos que reponen la energía que va perdiendo al funcionar: pesas que caen resortes elásticos, electroimanes que cambian cíclicamente su polaridad. El resultado es que el péndulo se mueve a un ritmo regular a pesar de la fricción y de la resistencia del aire.

Por lo tanto, en un péndulo que recibe energía, las curvas corresponden en el espacio de las fases a la figura III.11.

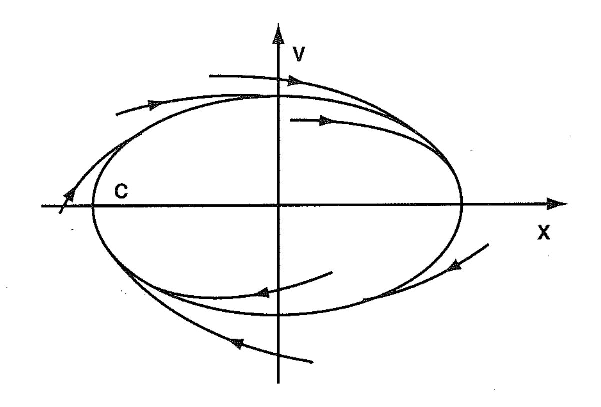


FIGURA III.11.

De hecho, si al péndulo se le da un empuje adicional, o se le frena momentáneamente, volverá eventualmente a su ritmo original, que corresponde a la trayectoria *C*. Esta curva constituye evidentemente un nuevo tipo de atractor, ya que en lugar de ser atraído el sistema a un punto fijo, es llevado a una trayectoria que forma una curva cerrada.

Obsérvese que hay una diferencia importante con el péndulo ideal que se mueve sin fricciones ni pérdida de energía: en éste, la más pequeña perturbación causada al agregarle un impulso mayor o al frenarlo, hace que cambie la órbita del péndulo para contraerse o expandirse un poco, o sea salta de una curva a otra concéntrica más grande o más pequeña. En contraste, la trayectoria de un péndulo ayudado mecánicamente tiene estabilidad, resiste pequeñas perturbaciones (figura III.11), y así cuando se le da un impulso mayor lo va disipan-

do de modo gradual, y si se lo frena va recibiendo energía de su fuente, por lo que en ambos casos regresa finalmente a esa única curva cerrada, que por lo tanto es también un atractor, al que llamaremos "atractor de ciclo límite".

Hay dos clases básicas de ciclos límites: el que acabamos de presentar para el péndulo, es estable; los puntos de trayectorias próximas se mueven hacia él. Hay también sistemas dinámicos con ciclos límite inestables, donde los puntos de trayectorias cercanas se alejan de esa curva, que actúa como un repulsar.

La importancia de lo que hemos analizado para el péndulo es que éste permite comprender las características esenciales del comportamiento de los sistemas que actúan cíclicamente y que son tan frecuentes en la naturaleza: un oscilador eléctrico, las mareas, las vibraciones del aire en un tubo de órgano, los impulsos eléctricos que hacen latir el corazón, la cantidad de individuos en una población de animales...

Recordemos los dos tipos de atractores descritos hasta ahora: *1) el punto atractor*, que corresponde a un estado estacionario del sistema, nada ocurre al transcurrir el tiempo; *2)* el atractor *de ciclo límite*, que indica un comportamiento periódico, lo que implica, además, que, si bien el sistema es disipativo y, por lo tanto, va perdiendo su energía, ésta se va reponiendo por la entrega de energía de alguna fuente exterior.

CONTRACCIÓN DE LOS VOLÚMENES EN EL ESPACIO DE LAS FASES

¿Cómo queda representado en el espacio de las fases el hecho que estamos tratando aquí con sistemas disipativos? Como vimos, el atractor de ciclo límite nos indica que se está ante un sistema disipativo estable, que repone la energía que va perdiendo. Si se tiene, por ejemplo, un péndulo entretenido y se le perturba frenándolo temporariamente, al disminuir el ángulo y la velocidad se obtiene la trayectoria *B* (figura III.12), pero el sistema recibe energía de su fuente para compensar esta disminución y la trayectoria termina por confundirse con el ciclo límite *A*.

Lo mismo ocurre si se da al péndulo un impulso adicional

que lo saque de su órbita; con el tiempo, la disipación de esta energía en exceso hará converger su trayectoria sobre el ciclo límite *A*.

Por lo tanto, el atractor de ciclo límite está dentro de una zona *C* del espacio de las fases tal que toda trayectoria que se inicie en un punto cualquiera de dicha región termina por ser atraída inexorablemente por el atractor. Esta zona se denomina "cuenca de atracción" (figura III.12).

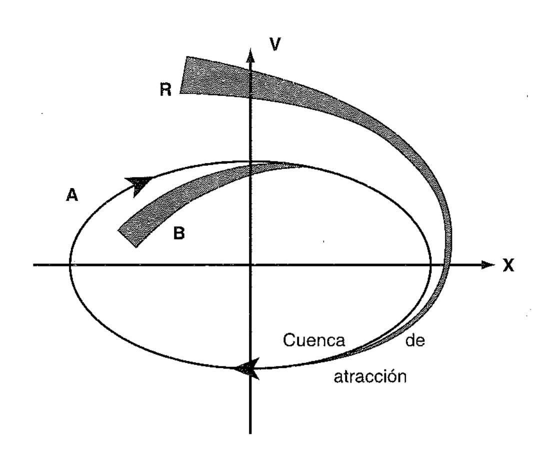


FIGURA III.12.

Supongamos que en esta cuenca *C* haya una región *R* que representa un conjunto de valores iniciales de posiciones e impulsos para el sistema. A medida que las trayectorias son atraídas por el ciclo límite, se van acercando entre sí y acaban por converger sobre el mismo, quedando finalmente una única trayectoria: hay una contracción de la región *R*, la que va disminuyendo hasta desaparecer en la curva del atractor.

Como una curva es una línea de una sola dimensión, no puede pasar por todos los puntos que conforman un volumen; siempre quedan infinitos puntos no cubiertos por la curva y es evidente, entonces, que en un espacio de las fases de tres dimensiones un atractor debe tener una dimensión inferior a 3, y esto se puede generalizar:

La dimensión *d* de un atractor en un espacio de *n* dimensiones es menor que *n*:

$$d < n$$

Ésta es la característica principal que distingue a los sistemas disipativos de los conservativos. En un sistema disipativo todas las condiciones iniciales convergen hacia regiones del espacio de las fases que tienen una dimensión menor que la del espacio original.

SISTEMAS DISIPATIVOS FORMADOS POR DOS PÉNDULOS ACOPLADOS

Pasemos ahora a estudiar el caso de un sistema disipativo formado también por dos péndulos acoplados. Aquí, de modo similar a lo visto en el estudio de sistemas conservativos formados por la combinación de dos péndulos ideales, se requerirá un espacio de las fases de tres dimensiones, en el que las trayectorias se desarrollan sobre la superficie de un toro, de modo que tenemos para el caso de un sistema disipativo un atractor más complicado que el de punto fijo o el de ciclo límite: se trata de una curva en forma de solenoide que pasa por todos los puntos de la superficie del toro, representando así el comportamiento combinado de dos péndulos acoplados de periodos que son inconmensurables, o sea cuyo cociente es un número irracional. Por lo tanto, lo llamaremos "atractor casi periódico".

El comportamiento de tal sistema es predecible, es decir, que conociendo las velocidades y posiciones de sus componentes en un momento dado, se lo puede determinar para cualquier otro instante. Y aun si tal conocimiento tiene un cierto margen de error, o incertidumbre, éste se mantiene en el mismo orden de magnitud para toda determinación futura. Tal propiedad se traduce en el espacio de las fases por el hecho de que dos trayectorias vecinas siguen siendo vecinas a medida que pasa el tiempo.

Volvamos ahora a un sistema que presenta un comportamiento caótico, como el de los dos péndulos acoplados por un imán que habíamos descrito.

Su representación en el espacio de las fases también requerirá que éste tenga tres dimensiones, en el que la trayectoria será una curva continua, similar al caso del atractor casi periódico. Pero lo que lo distingue de éste es que si uno examina dos trayectorias vecinas en el espacio de las fases, se ve que divergen rápidamente, alejándose cada vez más. Se trata aquí de un "atractor extraño", cuya característica esencial es la amplificación de los apartamientos, por mínimos que éstos sean, entre trayectorias en el espacio de las fases. Esta característica se denomina *sensibilidad a las condiciones iniciales*. He aquí la clave para comprender por qué el determinismo que rige a un sistema dinámico no implica necesariamente la predictibilidad.

Si aparece esta sensibilidad, el sistema es impredecible después de un cierto tiempo, no importa cuáles sean las otras características del espacio de las fases, ni tampoco su número de dimensiones. Sólo podríamos predecir su evolución con exactitud si conociésemos con precisión infinita absolutamente todos los factores que actúan sobre el sistema, y sabemos que esto es imposible, ya que necesariamente conocemos las condiciones iniciales sólo en forma aproximada.

En cambio, las situaciones correspondientes a los otros atractores pertenecen a estados estables y predecibles, porque no tienen dicha sensibilidad, sino todo lo contrario: hay una insensibilidad a las condiciones iniciales.

Esto se evidencia porque, de acuerdo con la figura anterior, hay en el espacio de las fases una cuenca de atracción dentro de la cual una trayectoria que parta de cualquier condición inicial termina inexorablemente por fundirse en el atractor; no importa cómo se inicie el proceso, el sistema acaba después de un tiempo por seguir el comportamiento estable y previsible descrito por dicho atractor.

La sorpresa que se experimenta ante la aparición del caos en un sistema tan simple como el formado por dos osciladores acoplados es natural, pues a nadie le resultaba novedoso o ex-

traño que sistemas tan complicados como la atmósfera terrestre o un torrente turbulento de agua tengan un comportamiento difícil de pronosticar. Sin embargo, el estudio de estos sistemas simples ha arrojado luz sobre el de los formados por un gran número de componentes.

El atractor que caracteriza el comportamiento caótico se transforma de manera espectacular y aparentemente contraria a la intuición, ya que debe reflejar en su geometría esa situación.

Su estructura debe exhibir dos tendencias opuestas: haciendo honor a su nombre, las trayectorias vecinas deben converger hacia el atractor y contrariamente, para reflejar el estado de sensibilidad a las condiciones iniciales, las trayectorias deben diverger distanciándose cada vez más. La velocidad con que divergen estas trayectorias sucesivas se mide con un *coeficiente* llamado *"exponente de Lyapunov"*.

Además, la otra condición esencial es que, como hemos visto antes, las curvas formadas por las trayectorias no se pueden cruzar tocándose en un punto (condición de determinismo). Resulta entonces un atractor muy difícil de visualizar, cuya forma no puede estar sobre una superficie, no importando que sea esta plana o curva como el solenoide que rodea el toro en el caso simple que examinamos.

La razón de esta imposibilidad es que la divergencia entre trayectorias adyacentes a la que nos obliga el estado caótico no se puede lograr sobre la superficie del toro, porque tras una cierta cantidad de vueltas éstas, al no ser paralelas, deberían cruzarse para poder alojar todas las trayectorias. No alcanza entonces el espacio que hay en la superficie y existe una única solución alternativa, que es la que aparece en el atractor: las trayectorias se despegan de la superficie saltando hacia afuera para ocupar la región que la rodea. Por lo tanto las dimensiones de este atractor deben ser mayores que las dos que corresponden a una superficie, o sea:

$$2 < d$$

Pero, y aquí surge la dificultad, estamos tratando un sistema simple, en un espacio de tres dimensiones, y hemos visto que, como las condiciones del sistema dinámico (velocidades, posi-

ciones, etcétera) están necesariamente limitadas a cierto rango de valores, el atractor debe ocupar sólo una zona restringida del espacio de las fases, en lugar de llenarlo por completo, y entonces su dimensión d debe ser menor que 3:

$$2 < d < 3$$

¡O sea que debemos imaginar una figura geométrica de dimensión mayor que 2 y menor que 3, es decir que esté en una situación intermedia entre una superficie y un volumen! Obviamente, una situación así no es normal en la geometría de Euclides, y éste puede haber sido uno de los motivos de que se haya descubierto hace tan poco la posibilidad del caos en sistemas simples.

Pero recientemente se han desarrollado matemáticas en las que sí existen formas irregulares o fragmentadas que se pueden caracterizar con "dimensiones" que, a diferencia de las euclidianas no son números enteros, y que han sido llamadas *fractales* por el matemático Benoit Mandelbrot, que ha sido uno de los principales impulsores para el estudio de estas extrañas geometrías.

Este atractor es entonces un fractal, está localizado en una región que incluye la superficie del toro pero, como es una curva, no ocupa todos los puntos del volumen de dicha región, quedando siempre infinitos puntos por los que no pasa.

Otros sistemas dinámicos, como los formados por osciladores eléctricos, fluidos turbulentos, reactivos químicos, exhiben atractores con estas características y que han sido bautizados "atractores extraños" por Ruelle en 1971.

Un atractor extraño y su sección de Poincaré pueden tener el aspecto general de la figura III.13, que podríamos comparar con el de un ovillo de hilo después de que un cacho-

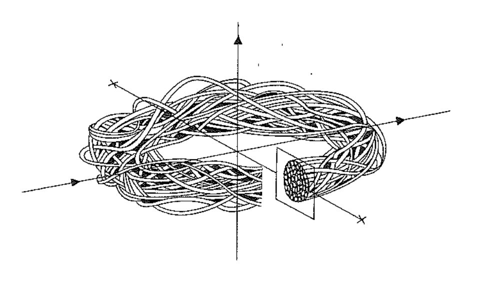


FIGURA III.13.

rro lo haya usado para jugar durante unas horas: si bien sigue siendo un hilo único (por lo tanto, de trayectoria determinada), será imposible al seguir las vueltas prever si un centímetro más adelante va a replegarse, ir hacia adentro del ovillo, o hacia afuera, etcétera. Como tiene sensibilidad a las condiciones iniciales, la más ínfima alteración de éstas se representará con otro ovillo enmarañado cuyas vueltas no tienen nada que ver con el primero, aunque el volumen que ocupa sea prácticamente el mismo. Para obtener la forma de un atractor extraño vamos a utilizar el siguiente procedimiento: consideremos el flujo en tres dimensiones de las trayectorias en el espacio de las fases (figura III.14).

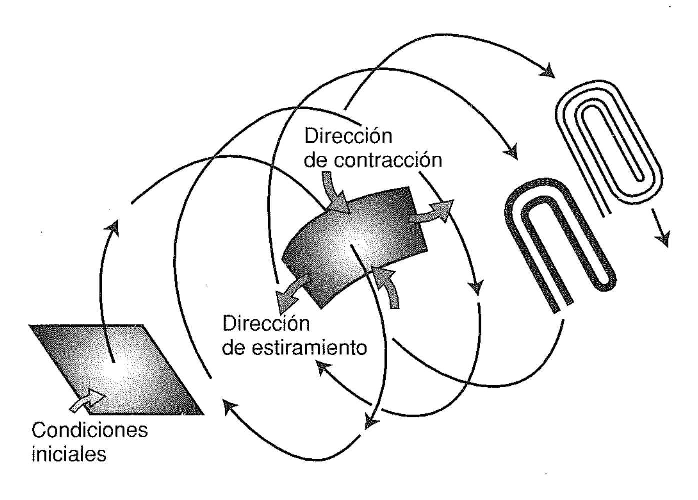


FIGURA III.14.

Este flujo está sometido a dos influencias opuestas, ya que se debe contraer porque hay un atractor, y se debe estirar por la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para analizar mejor el proceso, separemos los dos efectos, de manera que la contracción por la condición de ser un atractor se ejerza en la dirección vertical, mientras que el de estiramiento se ejerza en la dirección horizontal.

Secciones transversales de Poincaré sucesivas muestran, por lo tanto, un rectángulo que se va deformando, contrayéndose verticalmente y dilatándose horizontalmente. Este proceso de

contracción y estiramiento debe continuar a medida que el flujo de trayectorias recorre el atractor. Si se mide el estiramiento en cada vuelta sucesiva y se compara con el anterior, cuando crece exponencialmente con un factor (exponente de Lyapunov) positivo, hay realmente estiramiento de la trayectoria.

Pero hemos visto que el volumen que ocupa el flujo en el espacio de las fases debe mantenerse constante para sistemas hamiltonianos, porque la energía se conserva, o debe disminuir para sistemas disipativos, que pierden energía por fricción. Por lo tanto, el área ocupada por las sucesivas deformaciones de dicho rectángulo no puede aumentar, sólo puede mantenerse prácticamente constante si hay poca disipación de energía o disminuir, según el caso.

Además, aparece aquí una limitación adicional, que es la responsable de la aparición de la forma fractal: como las variables que describen el sistema (impulsos, posiciones, etcétera) no pueden tener cualquier valor imaginable, sino que están necesariamente restringidas, el flujo debe mantenerse confinado a una región del espacio de las fases y, por lo tanto, hay un límite para el estiramiento del rectángulo.

En consecuencia, la única solución que permite la geometría para cumplir todas estas condiciones asegurando al mismo tiempo que el flujo se mantenga en una zona restringida, es que el rectángulo se repliegue sobre sí mismo.

Al mantenerse de manera simultánea las tres operaciones, contracción, estiramiento y replegado, el rectángulo se transforma progresivamente en una herradura que, a su vez, se aplanará, estirará, plegará, dando nacimiento a una estructura de doble horquilla, y así sucesivamente. El área de la figura resultante en cada deformación va disminuyendo, o puede mantenerse prácticamente constante según el caso, pero no puede crecer.

En cada estiramiento aumenta la distancia en x entre puntos que antes eran contiguos, que se separan entonces exponencialmente, como corresponde a la condición de sensibilidad a las condiciones iniciales medida por el coeficiente de Lyapunov. El atractor extraño se fabricó así de manera similar a la que usa el panadero para la masa del pan, y no es sorprendente que su estructura sea por lo tanto parecida a la del hojaldre.

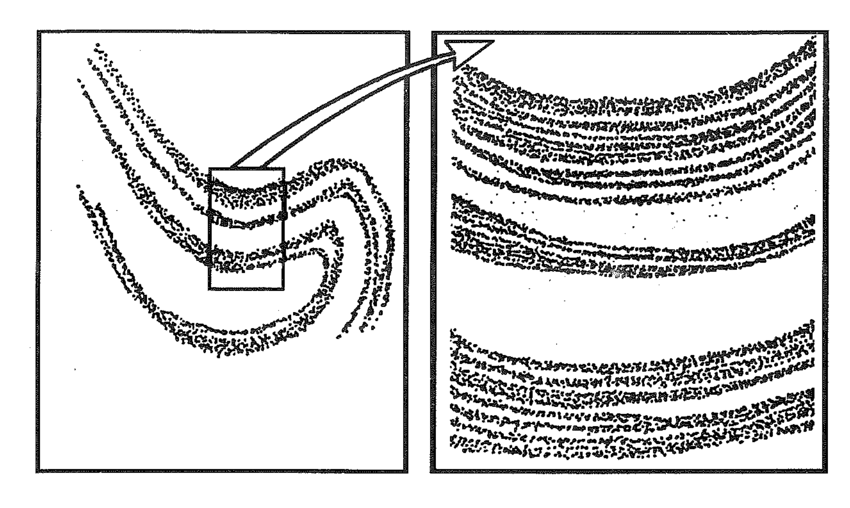


FIGURA III.15.

Si se examina la sección de Poincaré del atractor de la figura anterior, se ve una estructura de bandas que se repite sin fin (figura III.15).

Cada banda está compuesta por subbandas y éstas, a su vez, por otras de estructura similar; sin importar qué escala utilicemos para examinar la microestructura, su aspecto será semejante. Esta propiedad se llama de "autosemejanza" y es una característica de las formas fractales, las que como hemos visto, tienen dimensiones que no son números enteros.

En resumen, para que el comportamiento de un sistema dinámico pueda transformarse en caótico basta con que tenga un mínimo de tres grados de libertad y, por lo tanto, un espacio de las fases con un mínimo de tres dimensiones. Si en el correspondiente atractor encontramos que la sección de Poincaré presenta estructuras que son autosemejantes, sabremos que el atractor es extraño, lo que implica sensibilidad a las condiciones iniciales y, por lo tanto, imposibilidad de predecir el comportamiento del sistema más allá de un cierto tiempo.

Estos atractores extraños, curvas que no tienen fin y que se alojan en el espacio de las fases, son, en general, figuras geométricas de una rara belleza. No es posible calcularlos con exac-

titud con base en ecuaciones matemáticas, ya que ninguna los puede describir en forma precisa, y la única vía para construirlos y visualizar su aspecto en el espacio de las fases es mediante la computadora, tal como fueron descubiertos.

Es importante señalar que los atractores extraños son figuras que ocupan sólo una zona en el espacio de las fases, y esto permite diagnosticar de un vistazo si un sistema que aparece como caótico tiene regularidades subyacentes o si su comportamiento es puramente aleatorio.

Si se puede construir un atractor con base en los datos, esto nos indica que hay algún mecanismo no lineal operando sobre el sistema y que, por lo tanto, se trata del caos determinista. Si, en cambio, el comportamiento representado da una dispersión de puntos por todo el espacio de las fases, esto indica que se trata de fenómenos que ocurren al azar, lo que técnicamente se llama ruido aleatorio.

LAS DIMENSIONES FRACTALES

¿Qué es un fractal exactamente, y cómo se hace uno?

> Un fractal es una forma geométrica que consiste en un motivo que se repite a sí mismo en cualquier escala a la que se le observe.

Esta forma puede ser muy irregular, o muy interrumpida o fraccionada, y de aquí el origen de su nombre, que B. Mandelbrot derivó del latín "fractus" (interrumpido o irregular). Su característica básica es el concepto de la autosemejanza, y por ello la geometría de los fractales es una herramienta imprescindible para el estudio de todos aquellos fenómenos que exhiban una misma estructura no importa cuál sea el aumento con que se les examine.

Esta propiedad aparece con sorprendente frecuencia en la naturaleza: pensemos en un torrente turbulento con remolinos, que si se examinan en detalle contienen remolinos más pequeños, o en muchas plantas, helechos, árboles, que se ramifican por procesos sucesivos hasta llegar a las hojas, o en el sistema de circulación sanguínea con sus ramificaciones cada vez más pequeñas hasta llegar a los capilares.

Los fractales son, al mismo tiempo, muy complejos y particularmente simples. Son complejos en virtud de su detalle infinito y sus propiedades matemáticas únicas (no hay dos fractales iguales); sin embargo, son simples porque pueden ser generados por la aplicación sucesiva de una simple iteración, y la introducción de elementos aleatorios.

Los matemáticos han concebido gran variedad de fractales, pero el más antiguo es probablemente el del matemático G. Cantor, en 1883. Éste quería sorprender a sus colegas con dos características aparentemente contradictorias para un conjunto de números comprendidos entre el 0 y el 1: *a)* que el conjunto tuviera medida cero, o sea que si se le representase con puntos sobre una recta, en cualquier porción de la misma los puntos que no pertenecen al conjunto fuesen muchísimos más que los que son parte de él, y, simultáneamente, *b)* que la cantidad de miembros del conjunto fuera tan innumerable como el conjunto de todos los números reales también comprendidos entre 0 y 1.

Muchos matemáticos, incluyendo al mismo Cantor al principio, no creían que semejante monstruo pudiese existir, pero finalmente él lo descubrió. Su construcción parece asombrosamente sencilla. Comencemos con un segmento de recta y marquemos los puntos extremos con 0 y 1. Borremos el tercio interno, pero manteniendo sus puntos extremos 1/3 y 2/3. Quedan dos segmentos con un total de cuatro puntos extremos, y a cada uno de éstos le borramos nuevamente el tercio interior, con lo que quedan cuatro segmentos con dos puntos extremos cada uno, o sea puntos que corresponden a los 8 números: 0, 1/9, 2/9, 3/9, 6/9, 7/9, 8/9 y 1. Si continuamos con el mismo procedimiento *ad infinitum,* llegaremos eventualmente a que cada segmento esté formado por un único punto.

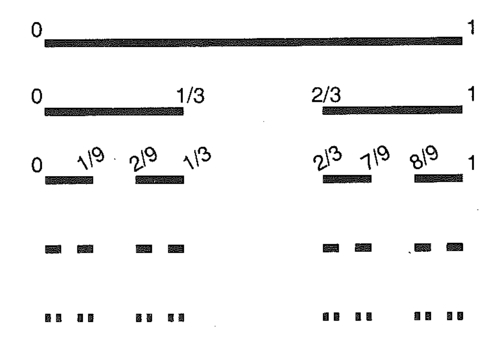


FIGURA III.16.

En la figura III.16 se muestran las primeras cin-

co operaciones de borrado, pero no hay forma de dibujar el resultado final. El conjunto de Cantor tiene agujeros en cualquier escala en que se le examine, y está formado únicamente por infinitos puntos aislados, ninguno de los cuales tiene por vecino a otro punto del conjunto. Si se quiere medir la longitud que queda, se comprueba que es cero por estar hecha de una suma de agujeros, ya que los segmentos que se fueron quitando suman un total de longitud 1 después de las infinitas operaciones de borrado.

Los matemáticos dicen entonces que el conjunto de Cantor tiene medida o dimensión cero. Pero actualmente hay un nuevo concepto matemático que tiene más significado para medir las dimensiones de los fractales, y de acuerdo con éste se demuestra que la dimensión del conjunto de Cantor es la llamada "dimensión fractal D"

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$$

que resulta ser no un número entero sino una fracción, y que indica una forma geométrica intermedia entre puntos (dimensión euclideana 0), y una curva (dimensión euclidiana 1).

Hay que aclarar que no todos los fractales tienen una D que es una fracción; éste puede ser entero, pero su forma es siempre interrumpida o irregular.

Tal como ocurre con las dimensiones del espacio de las fases, se debe tener presente que una dimensión fractal no tiene el mismo significado que el de las dimensiones de nuestro espacio euclidiano, sino que es la expresión numérica que nos permite medir el grado de irregularidad o de fragmentación de una de estas figuras. Así, una dimensión D entre 1 y 2 significa que se trata de ciertas curvas planas muy irregulares que casi llenan un plano, y las superficies que parecen hojaldres, con numerosos pliegues que llenan parte de un volumen tienen un D entre 2 y 3. Hay fractales con $D = 1$ y con $D = 2$, que no se parecen en nada a una línea o a un plano, pero siempre son irregulares o interrumpidos.

Volvamos ahora a examinar el atractor extraño correspondiente a la transformación de la herradura.

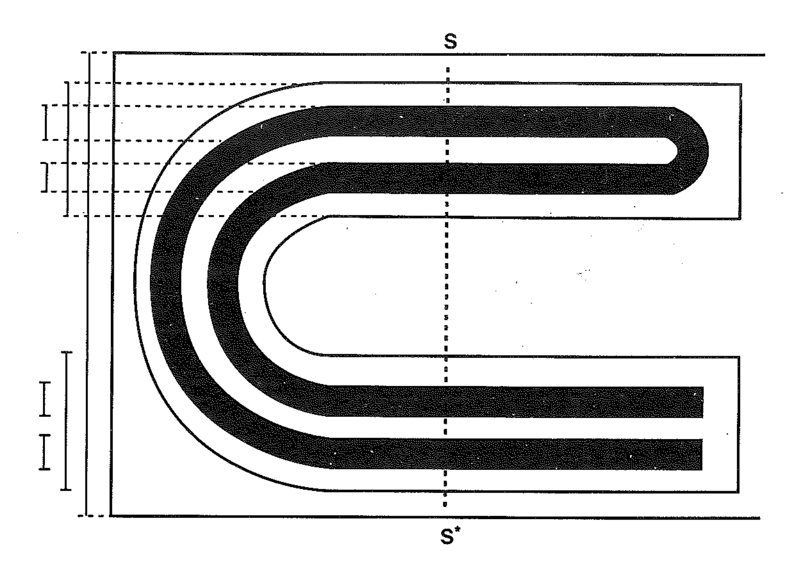


FIGURA III.17.

Esta transformación fue desarrollada por el matemático S. Smale, para aplicarla al estudio de osciladores electrónicos acoplados que se utilizaban en los equipos de radar. Al hacer una sección *s-s** (véase la figura III.17) se observa el conjunto de Cantor.

Las propiedades esenciales de este atractor aparecen en un gran número de secciones de Poincaré para sistemas caóticos. El conjunto de Cantor es un ejemplo de fractal interrumpido.

Un fractal, ejemplo clásico de una curva irregular, infinitamente fracturada, es la curva de Koch, propuesta por el matemático sueco H. von Koch en 1904. Para construirla, se parte de un segmento de recta (figura III.18) de longitud 1 y en su tercio medio se construye un triángulo equilátero. La longitud de esta línea es ahora 4/3. Si se repite la operación se obtiene la figura con una longitud $(4/3)^2$, o 16/9, y reiterando infinitas veces se llega a una forma fractal de longitud infinita y cuyos extremos están, sin embargo, separados por la misma distancia que el segmento generador inicial de longitud 1. Su dimensión fractal es $D = 1.26\ldots$

Otra variante es el copo de nieve de Koch que se construye con el mismo método a partir del triángulo equilátero (figu-

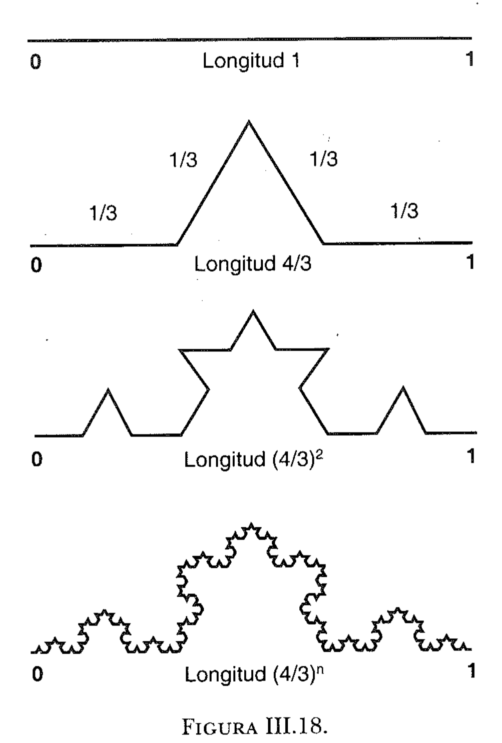


FIGURA III.18.

ra III.19), y en el que, si cada lado del triángulo mide 1/3, después de n iteraciones se tiene un perímetro de longitud total $(1/3)^n$, que se hace infinito cuando n llega a infinito, de modo que si uno quisiera recorrer idealmente con un lápiz todas las vueltas de la curva, no llegaría jamás al final, a pesar de que encierra una figura hexagonal de área perfectamente limitada.

Estas extrañas figuras parecen productos de la imaginación de algunos matemáticos desconectados de la vida cotidiana.

Sin embargo, como tantas veces se ha visto en la historia del conocimiento, el pensamiento creativo, que no busca una utilidad práctica inmediata, resulta ser muy fructífero. Así, esta nueva geometría concebida a principios de siglo resulta al día de hoy indispensable para la dinámica que estamos estudiando, y que tiene tantas aplicaciones.

Ahora podemos entender por qué los fractales y los atractores extraños se hallan tan íntimamente conectados. Como ha-

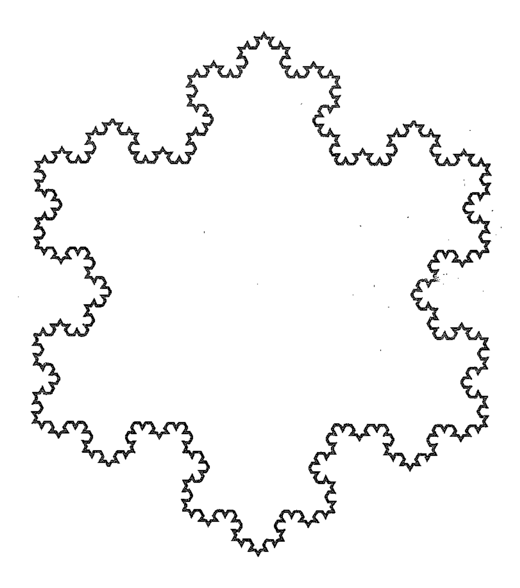


FIGURA III.19.

bíamos visto, un atractor extraño está recorrido por el punto que representa al sistema dinámico, que va describiendo una curva de infinita complejidad, que se estira y al mismo tiempo se pliega y repliega *ad infinitum,* y cuya sección de Poincaré está formada por puntos agrupados con características de autosemejanza.

Un atractor extraño es, por lo tanto, una curva fractal.

IV. Caos determinista en los cielos

PODRÍAMOS IMAGINAR la sorpresa de Newton si leyese el artículo de la revista *Science* del 3 de julio de 1992, donde se confirma que el comportamiento del sistema solar entero evidencia signos de caos. Gracias a las computadoras modernas se ha podido encarar el viejo problema de cuán estable es este sistema, ya planteado en la época del gran matemático y físico Henri Poincaré.

Una característica del sistema planetario, como los demás sistemas que estudia la mecánica celeste, es que para los tiempos considerados, que pueden ser de hasta miles de millones de años, no hay prácticamente disipación de energía por rozamiento, ya que los cuerpos celestes se mueven en un vacío casi perfecto, y las pérdidas de energía por otros efectos, como el de radiación, tampoco son importantes, de modo que se tienen aquí cuerpos que forman sistemas dinámicos conservativos o hamiltonianos.

Para el sistema solar, los resultados son sorprendentes: G. Sussman y J. Wisdom describen en el mencionado artículo el cálculo por integración numérica de la evolución de todo el sistema para los próximos cien millones de años, lo que requirió un mes de tiempo de una computadora especial para cada corrida del programa.

Resultó que el comportamiento de los nueve planetas a partir de los próximos cuatro millones de años revela que el sistema planetario está en estado caótico.

Para nuestra tranquilidad, esto no significa que el caos en el sistema solar sea de tales características que se vaya a aniquilar dentro de poco tiempo, con planetas chocando entre sí, o huyendo hacia otras galaxias, sino que sus órbitas son impredecibles cuando se calculan para tiempos del orden de los cien millones de años y, por lo tanto, sólo se puede anticipar que se moverán en el espacio dentro de zonas determinadas. Éstas no se superponen, de modo que no presagian colisiones entre planetas, al menos hasta donde se ha calculado, que corresponde a los próximos cien millones de revoluciones de nuestro planeta alrededor del Sol.

También se encontró que el subsistema formado por Júpiter y sus satélites es caótico, lo mismo que el de la órbita del planeta Plutón.

Los investigadores estimaron el error con que se conoce la posición inicial de un planeta en su órbita en sólo 0.00000001%. Cabría esperar que si se calculan dos órbitas posibles que difieran inicialmente en su posición en ese porcentaje, las órbitas mantendrían a medida que pasa el tiempo dicha diferencia, que daría una distancia entre las mismas del orden de 10 m hasta 1 km.

Pero se encontraron con que la distancia entre esas dos órbi-

tas alternativas se multiplicaba en el cálculo por 3 cada 4 millones de años y, por lo tanto, pasaba a ser 9 veces mayor a los 8 millones de años, 27 a los 12 millones de años, y así sucesivamente; a los 100 millones de años, entonces, podrían diferir en la posición del planeta en un 100% para la región caótica, también llamada "de resonancia".

En particular, para la Tierra, un error de medición de la ubicación inicial en su órbita de tan sólo 15 metros, hace imposible predecir en qué posición de su órbita estará dentro de cien millones de años.

En realidad el cálculo muestra que estas regiones caóticas, llamadas de resonancia, están restringidas a una porción del espacio, de modo que en el caso del sistema solar, no evidencien futuras colisiones entre planetas.

Pero la importancia de este descubrimiento es algo más que una curiosidad astronómica de interés sólo para especialistas. Entre obras consecuencias, tiene una eminentemente práctica: por las rutas del cielo, no solamente circulan "vehículos pesados" como son los planetas y sus satélites, sino que ellas son cruzadas también por infinidad de fragmentos tales como asteroides y cometas. Mediante la observación con telescopios y el cálculo basado en las ecuaciones de la mecánica celeste, es posible prever dónde y cuándo se cruzarán los caminos de estos objetos. Así se sabe que en julio de 1994 un fragmento, de tamaño considerable, chocaría con Júpiter, cayendo sobre la cara que en ese momento no será visible desde la Tierra. También se sabe que el asteroide 1989 AC, que aparentemente está en resonancia con Júpiter, cruzará la órbita de la Tierra en el año 2004, pasando a una distancia de nuestro planeta de 0.011 unidades astronómicas, o sea 1 650 000 km.

Afortunadamente las ecuaciones permiten definir con precisión la ubicación del planeta para dentro de unas pocas revoluciones alrededor del Sol, de modo que la humanidad espera este evento con total tranquilidad. Pero como hemos visto, la capacidad de predecir si habrá o no colisiones se va perdiendo en una especie de niebla a medida que avanzamos en el futuro.

¡Qué lejos queda el concepto de las leyes de la mecánica celeste que permiten predecir para siempre el movimiento de los astros!

Pero, ¿no es esto contradictorio con el hecho de que conocemos el movimiento ordenado de los planetas desde hace milenios, y que ya los babilonios podían predecir con exactitud un eclipse con años de anticipación? ¿Acaso la revolución newtoniana no consistió en el descubrimiento de las leyes inmutables que gobiernan todos los sistemas dinámicos que aparecen en la naturaleza?

Ahora comprendemos que ese orden es tal para un tiempo de observaciones de unas pocas decenas de miles de vueltas de la Tierra alrededor del Sol, pero que se desvanece para escalas de tiempo miles de veces mayores.

Los descubrimientos de Poincaré

La existencia de este problema era también sospechada por los científicos del siglo pasado, pero fue Henri Poincaré (figura IV.1) el que lo evidenció en su verdadera magnitud.



FIGURA IV.1. *Henri Poincaré. Tomado de* La Recherche, *232, mayo 1991, vol. 22, p. 566.*

En 1887, el rey Óscar II de Suecia instituyó un premio de 2 500 coronas para quien produjese una respuesta a una pregunta fundamental para la astronomía: ¿es estable el sistema solar?, definiéndose la estabilidad como la situación en que pequeños cambios en los movimientos planetarios sólo traen pequeñas alteraciones en el comportamiento del sistema.

En aquella época podía caber, por ejemplo, la sospecha de que la Tierra terminaría por precipitarse sobre el Sol. Al tratar de resolver este caso, Poincaré abrió el rumbo para tratar los problemas de estabilidad en sistemas dinámicos complejos, y si bien no pudo resolver el problema para los diez cuerpos que forman el sistema solar, recibió de todos modos el premio por sus importantes aportes, entre ellos la creación de la topología.

> Por supuesto que las leyes de Newton siguen siendo válidas, pero sus soluciones exactas requerían una inteligencia como la de Laplace que introdujera en las mismas datos con precisión infinita.

Los astrónomos sólo pueden conocer en forma aproximada las condiciones iniciales de velocidades y posiciones de los cuerpos celestes, pero esta precisión limitada a una cierta cantidad de cifras decimales no ha sido obstáculo para muchos cálculos, ya que se ha trabajado normalmente con ecuaciones en las que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales producen efectos proporcionalmente pequeños, pero, ¿qué ocurre cuando un sistema obedece a situaciones de alta sensibilidad a las condiciones iniciales?

Tres o más cuerpos pueden generar caos

Para un sistema hamiltoniano de sólo dos cuerpos, como la Tierra y la Luna o la Tierra y el Sol, las ecuaciones de Newton se pueden resolver en forma exacta, este problema se llama integrable, y su solución corresponde a una órbita elíptica. Pero si se agrega un tercer cuerpo (por ejemplo, al introducir el efecto que produce Júpiter, con su masa que es la milésima par-

te de la del Sol, sobre el sistema Tierra-Sol), hay que utilizar un método aproximado, llamado de perturbaciones.

En dicho método, esa perturbación del orden de un milésimo que produce la atracción gravitatoria de Júpiter sobre el sistema Tierra-Sol, se suma a la solución del caso de los dos cuerpos, Tierra y Sol, logrando así una mejor aproximación a la realidad. A este resultado se le vuelve a sumar el efecto de perturbación de Júpiter, pero elevado al cuadrado, o sea un factor que es un millonésimo, y así reiteradamente, en una serie de aproximaciones donde cada una deberá ser de menor magnitud que la anterior.

Se espera que esta serie formada por la suma de términos con valores decrecientes converja, es decir, que si para una suma de, por ejemplo, 1 000 términos se tiene como resultado un cierto número, y al agregar el término 1 001 la suma crece en 1%, el sumar el término 1 002 produzca un nuevo aumento de la suma menor que ese 1%, por ejemplo 0.9%, y que cada vez que se agregue otro término, la nueva suma aumente en forma decreciente, tendiendo a una cifra que sea prácticamente constante para un número suficientemente grande de términos.

Esto permitiría afirmar que el problema de tres cuerpos está resuelto: la ubicación de cada uno de ellos en su órbita estará dada por esos números calculados con el método de perturbaciones. Pero al aplicarlo al caso del sistema Sol-Tierra-Luna, Poincaré descubrió, para su asombro, que algunas órbitas se comportaban caóticamente, es decir que su posición era imposible de predecir mediante ese cálculo, lo que implica que no hay aquí un comportamiento lineal de las ecuaciones.

La suma de aproximaciones divergía —su resultado era un número cada vez más grande— con lo que el efecto de estas perturbaciones infinitésimas se iba amplificando y que en ciertas situaciones límite podrían llegar a sacar a un planeta por completo de su órbita.

Pero Poincaré no pudo avanzar más y llegar a resolver el caso real del sistema solar completo, por las dificultades que significaba intentar el cálculo para diez cuerpos. Como hemos visto, este problema tuvo que esperar un siglo, para ser encarado con las modernas herramientas de la computadora y el cálculo por integración numérica. El gran matemático demostró, sin em-

bargo, la posibilidad de que un sistema dinámico totalmente determinista, como el de los planetas en órbita, llegue a un estado de caos donde no se pueda predecir su comportamiento futuro. Basta para ello que responda a una situación no lineal, en la que una pequeñísima fluctuación se vaya amplificando al ser reiterada un gran número de veces.

Además, Poincaré probó que el caos puede aparecer ya con sistemas relativamente simples, como puede ser uno formado por sólo tres cuerpos, para el que las estructuras que los describen en el espacio de las fases forman la complicada geometría a la que hacíamos referencia en el capítulo 2.

Los fenómenos de resonancia

Una contribución importante de Poincaré fue demostrar que en este sistema las inestabilidades son debidas al fenómeno de resonancia.

La resonancia aparece cuando hay una relación numérica simple entre periodos de rotación de dos cuerpos del sistema solar. Por ejemplo, Plutón tiene un periodo de rotación en su órbita alrededor del Sol de 248.54 años y Neptuno de 164.79 años; la relación entre periodos es entonces de 3 a 2, lo que se indica como resonancia órbita-órbita 3:2. Puede haber también resonancias entre el periodo orbital de un objeto y el de rotación del mismo alrededor de su eje (espín), como, por ejemplo, la Luna, con una resonancia espín-órbita 1:1 que es la responsable de que aquélla muestre siempre la misma cara a la Tierra.

Un efecto que puede resultar de la resonancia es la indefinición en la posición de un planeta en su órbita. Tal es el caso de Plutón, con su resonancia órbita-órbita 3:2 con Neptuno. Se ha hecho el cálculo de su posición mediante una computadora, pasando el programa dos veces, cada una con la posición inicial muy ligeramente diferente. Las dos órbitas así obtenidas ubican a Plutón en lados opuestos respecto del Sol después de cuatrocientos millones de años.

Otro efecto posible de la resonancia es producir un brusco aumento de la excentricidad de la órbita de un asteroide que lo arroje sobre un planeta. Se ha comprobado que dicho efec-

to es el responsable de la existencia de zonas vacías o "lagunas de Kirkwood" en el cinturón de asteroides que existe entre Marte y Júpiter. J. Wisdom, utilizando un método de integración numérica para esta dinámica caótica, demostró que el efecto de resonancia produce cambios violentos en la excentricidad de las órbitas, los que acabaron por fragmentar a los asteroides y lanzarlos sobre Marte, y también sobre la Tierra: un ejemplo dramático de la ubicuidad del caos en el sistema solar.

Las resonancias son importantes en los sistemas hamiltonianos y a menudo implican situaciones caóticas.

Para comprender esto, podemos visualizar el movimiento del sistema en el espacio de las fases (véase la figura IV.2).

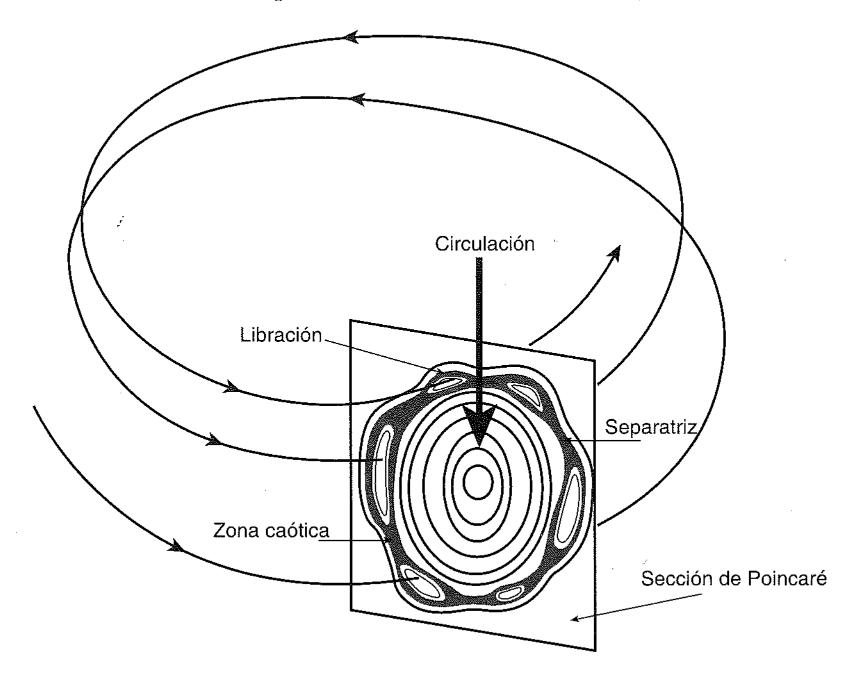


FIGURA IV.2.

Aquí como para el péndulo ideal, podemos considerar valores pequeños de energía, a los que, en forma similar a las oscilaciones de poca amplitud del péndulo, corresponden los movimientos llamados "de libración", que son pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio en reposo; y así como

para los valores más grandes de energía, el péndulo efectúa movimientos de rotación, para un sistema kepleriano (un cuerpo único en órbita alrededor del Sol), el movimiento se denomina "de circulación". Entre ambos movimientos, de libración y de circulación, está la separatriz, que para el caso de una perturbación (resonancia), puede dar origen a una zona caótica.

Analicemos la sección de Poincaré correspondiente, donde el punto equivale a una órbita periódica. Si se combinan dos péndulos, se tiene un sistema dinámico de dos cuerpos. Cada círculo concéntrico que rodea al punto central en la sección de Poincaré corresponde a un movimiento casi periódico, que es una combinación de los dos movimientos circulares, cada uno con su propio periodo. En el espacio de las fases se tiene un toro, sobre cuya superficie se va arrollando la trayectoria casi periódica. Para que haya un movimiento casi periódico es indispensable que la relación entre los periodos de rotación sea un número irracional. En este caso, al permanecer la curva sobre el toro, su intersección con la sección de Poincaré está contenida en una curva cerrada (curva invariante). Si se va aumentando el periodo menor, se tienen curvas concéntricas de radio creciente.

Pero en aquellas zonas en las que la relación de periodos es un número racional, como, por ejemplo, 3:2, 5:3, etcétera (condición de resonancia), puede aparecer el caos. Esto se evidencia en la sección de Poincaré porque aparecen regiones de inestabilidad, donde los puntos sucesivos que marca la trayectoria caótica al interceptar dicha sección, llenan toda la región inestable de manera aleatoria.

Dentro de esta zona caótica de resonancia aparecen islas de estabilidad, en cada una de las cuales hay una estructura pareada a la que se encuentra en el centro de la sección de Poincaré. Alrededor de cada isla existe una zona caótica en la que el movimiento es inestable: una trayectoria puede girar en las curvas dentro de las islas (libración), y luego en las curvas de la zona central (circulación). La zona caótica corresponde a las separatrices en el caso del péndulo, y en esta zona el movimiento es extremadamente inestable, y muy sensible a las condiciones iniciales.

El origen del movimiento caótico de Mercurio, Venus, Tierra y Marte es la existencia de resonancias entre los periodos

de precesión (o sea de rotación en el espacio de la órbita planetaria) de estos planetas. Los cálculos muestran que nuestro planeta está lejos de la zona central estable de movimientos casi periódicos, y más bien en la zona caótica cerca de una isla (figura anterior), motivo por el cual no se puede predecir su posición a los cien millones de años.

¿Comportamiento caótico en las galaxias?

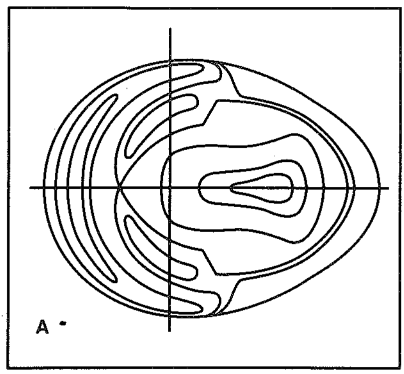
Se ha descrito hasta aquí el método para estudiar la evolución de un sistema hamiltoniano formado por tres o más cuerpos, pero ¿qué ocurriría si se le aplicara a un sistema de una cantidad inmensa de componentes como lo es una galaxia, que también es un sistema hamiltoniano, ya que para las escalas de tiempo involucradas, de cientos de millones de años, la pérdida de energía por radiación o fricción es despreciable?

En 1962, el astrónomo M. Hénon encaró este problema tratando de calcular el movimiento de estrellas individuales alrededor del centro de una galaxia. Una de las diferencias con el sistema solar es que, en éste, el centro de atracción está concentrado en el Sol, una esfera alrededor de la que giran los planetas en órbitas planas, mientras que una galaxia se puede modelar como una zona de atracción con forma de disco alrededor de la cual giran las estrellas en órbitas de tres dimensiones.

Hénon computó con el método de Poincaré la intersección de las trayectorias sucesivas de una estrella con un plano, determinando qué cambios se producían para diferentes energías del sistema. Como era de esperarse para un sistema hamiltoniano, la sección de Poincaré del toro tridimensional generado por las trayectorias mostraba curvas concéntricas, de áreas encerradas proporcionales a la energía (véase la figura IV.3).

Pero llegó un momento, para las energías más altas, en el que las curvas se quebraban, desapareciendo para ser reemplazadas por puntos distribuidos aparentemente al azar en zonas dentro de las cuales aparecían otras curvas como islas en un mar borrascoso. En los estados del sistema correspondientes se hace entonces imposible establecer con precisión las órbitas estelares.

En resumen: vemos así como aun la mecánica celeste, que era considerada el mejor ejemplo de la capacidad predictiva



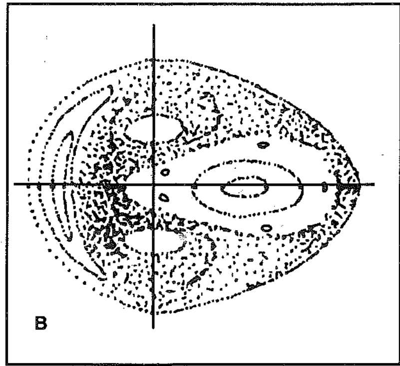


FIGURA IV.3.

de las ciencias físicas, muestra los límites impuestos por la existencia de los fenómenos no lineales, los que aparecen tanto en el sistema solar como en las galaxias.

Estos hallazgos no sólo son importantes para la mecánica celeste. Hay otros sistemas dinámicos de gran interés, como los plasmas formados por gases ionizados, o sea tan calientes que muchos de sus átomos pierden sus electrones.

El principal interés de estos sistemas se debe a que se está investigando cómo utilizarlos para hacer reactores de fusión nuclear que permitan suministrar energía segura y barata. Estudiándolos como sistemas hamiltonianos de una inmensa cantidad de componentes, sometidos ya no a la atracción gravitatoria sino a campos eléctricos y magnéticos, se han hallado secciones de Poincaré con islas de regularidad, similares a las figuras de Hénon, lo que confirma que pueden pasar a un estado de caos para ciertos valores críticos.

V. Caos, entropía y la muerte del universo

COMO consecuencia de la Revolución Industrial apareció la necesidad de comprender el fenómeno de la generación y apro-



vechamiento del calor en las máquinas de vapor. Esto involucraba estudiar sistemas de gases y de líquidos de los que sólo se pueden medir aquellas propiedades globales como la temperatura, presión, volumen, viscosidad, que no requieren el conocimiento de las posiciones y velocidades de cada uno de sus átomos.

Leyes para el calor

El primer gran logro de la termodinámica fue la *ley de conservación de la energía,* que establece que el calor es una más de las formas en que se presenta la energía, y que la energía total involucrada en un proceso puede cambiar de características, pasando por ejemplo de calórica a cinética, eléctrica o química, pero jamás se pierde. En una máquina de vapor se transforma la energía calórica en energía cinética (de movimiento) de un pistón, y si se frotan dos barras, se obtiene calor por fricción.

Los conceptos de calor y temperatura se hicieron más precisos con el desarrollo de la teoría cinética de los gases: la energía calórica de un cuerpo es la suma de la energía de movimiento, o cinética, del total de las moléculas que lo componen, mientras que la temperatura es proporcional a la energía cinética de la molécula promedio. Nuestra imagen de un gas es hoy (figura V.1) la de un número extremadamente elevado de moléculas que se comportan como diminutas bolas de billar, elásticas, que se mueven en línea recta a grandes velocidades sin preferencia por ninguna dirección en particular en el espacio, hasta colisionar con otras y rebotar vigorosamente. Las moléculas que forman el aire en condiciones normales de presión y temperatura, por ejemplo, se mueven en promedio a 1 800 kilómetros por hora y realizan cinco mil millones de colisiones cada segundo. Este agitado movimiento no cesa nunca y aumenta al crecer la temperatura.

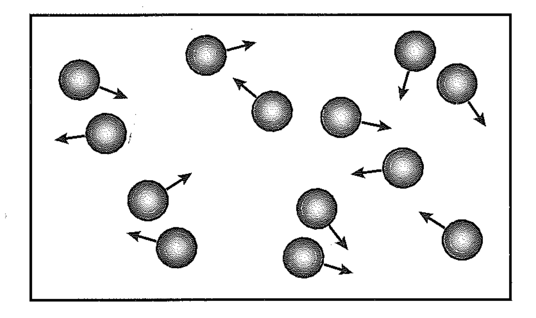


Figura V.1.

Hay que resaltar aquí el notable hecho de que la palabra gas fue inventada por el médico holandés Van Helmont en el siglo XVII. Hasta ese entonces se hablaba de "vapores" y "espíritus", pero él, con rara visión, consideró que los mismos estaban formados por partículas invisibles disparadas en todas direcciones, y que eran la imagen del caos, palabra de la que derivó el nombre de "gas".

Si el gas está contenido en un recipiente, sus moléculas harán impacto en su movimiento con las paredes del mismo, ejerciendo globalmente una presión que será tanto mayor cuanto más energía cinética tengan sus moléculas, o sea cuanto más caliente esté el gas.

La segunda ley de la termodinámica establece que, si bien la cantidad total de energía es constante en un sistema aislado, que es aquel que no recibe energía ni materia desde su entorno, la energía útil capaz de ser utilizada para efectuar un trabajo dismuniye, pues en todo proceso una fracción de la energía se transforma inevitablemente, por fricción, rozamiento, etcétera, en calor, la que no puede ya aprovecharse para su conversión en alguna forma de energía.

La termodinámica nos está dando, entonces, dos noticias: una "buena" y otra "mala". La "buena" es que la energía es inagotable, que siempre habrá energía en el Universo; la "mala" es que la energía viene en dos tipos, de los que sólo uno de ellos nos es útil, y que, además, esta energía útil está disminuyendo y algún día desaparecerá.

¿Qué ejemplo tenemos de energía útil capaz de producir trabajo en un sistema aislado? Un caso simple es el de un recipiente cerrado, dividido en dos compartimentos mediante un tabique móvil que actúe de pistón (véase la figura V.2).

Supongamos que inicialmente llenamos un compartimento con un gas caliente, y el otro con el mismo gas a menor temperatura. La energía del gas es entonces utilizable, pues el gas caliente tiene sus moléculas con mayor energía de movimiento que el gas frío y, por lo tanto, ejerce mayor presión sobre el pistón, empujándolo.

A este estado organizado, donde hay una diferencia aprovechable entre las dos regiones del sistema, lo consideramos

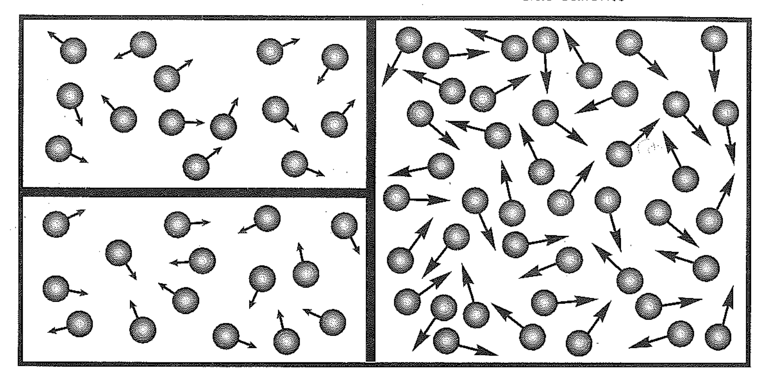


FIGURA V.2.

como ordenado, en contraposición con el caso en que el recipiente está lleno uniformemente con gas a la misma temperatura, el que, por lo tanto, ejerce de ambos lados del pistón igual presión y no lo puede mover.

LA FLECHA DEL TIEMPO

Si bien las moléculas del gas tienen individualmente movimientos reversibles —una película cinematográfica de sus trayectorias proyectada del principio al fin o del fin al principio sería igualmente válida, pues las leyes de Newton serían las mismas— en conjunto el gas sufre un proceso irreversible: si inicialmente había una diferencia de temperatura entre ambos compartimentos, ésta terminará por desaparecer, porque las moléculas del gas más caliente irán perdiendo parte de su energía al empujar el pistón y, por lo tanto, su temperatura disminuirá.

Al mismo tiempo, las moléculas del gas frío colisionan con el pistón que avanza hacia ellas, con lo que reciben más energía cinética, de modo que aumenta su temperatura. Después de un tiempo, ambos compartimentos contendrán un gas tibio, que ejerce igual presión de ambos lados del pistón y que, en consecuencia, no puede producir trabajo.

Nuestra experiencia nos dice que nunca se ha visto que espontáneamente aparezca una diferencia de temperatura, y vuelva por sí sólo a calentarse el gas en un compartimento y enfriarse en el otro.

No es que haya una prohibición que surja de las leyes de la física, pues para que esto ocurriera bastaría con que la mayoría de las moléculas, que individualmente se están moviendo en cualquiera de las direcciones posibles sin preferencia por ninguna, de manera espontánea y por una simple coincidencia se echaran a mover todas en una misma dirección, hacia el pistón las de un compartimento y alejándose del pistón las del otro.

Se ha calculado la probabilidad de que algo así pase y el resultado es que se requeriría esperar toda la edad del Universo, y mucho más, para que se produjera tal fenómeno. Por lo tanto, esta vuelta al estado inicial que equivale a una reversibilidad en el tiempo, en la práctica es tan improbable que podemos considerar que jamás ocurrirá.

De este modo se introdujo en la física la noción de procesos no reversibles en el tiempo, una asimetría que se ha denominado "flecha del tiempo", pues los procesos termodinámicos para sistemas aislados sólo ocurren en una dirección: aquella en que con el tiempo crece la energía no utilizable.

Más aún, si se considera todo el Universo como un sistema termodinámico aislado, ya que por definición no hay un exterior al mismo desde el que pueda llegar materia o energía, se llega a la conclusión de que finalizará con una "muerte térmica", cuando toda la energía que contiene se degrade a energía calórica no utilizable, hasta alcanzar un estado final de equilibrio.

Este estado al que se llegaría inexorablemente se identifica con el desorden o caos, porque se visualiza como el fin del Universo tal como lo conocemos, de la organización que mantiene toda la actividad ordenada que percibimos, y en el cual, desde las galaxias y sistemas solares hasta los seres que las habitan, desaparecerían para transformarse en un caos homogéneo de átomos moviéndose ciegamente para el resto de la eternidad.

Así, la formulación más general de la segunda ley de la termodinámica expresa que todo sistema físico aislado, incluyendo el Universo, aumenta espontáneamente su desorden.

En 1865, el físico Clausius introdujo el concepto de entropía para plantear en una función matemática precisa esta tendencia de la evolución de los sistemas termodinámicos.

La función entropía aumenta en un sistema aislado de la misma manera que el desorden, y se la considera como una medida de ese desorden.

Clausius reformuló, además, las dos leyes de la termodinámica del siguiente modo:

> La energía del Universo es constante.
> La entropía del Universo tiende hacia un máximo.

Estos conceptos fueron analizados mediante la mecánica estadística por el físico Ludwig Boltzmann, quien demostró que el estado final de un sistema aislado, cuando no hay un cambio con el tiempo en las propiedades macroscópicas, tales como la densidad, presión, temperatura, etcétera, es el de equilibrio termodinámico, hallándose, en ese caso, el conjunto de sus moléculas en un estado de máxima entropía.

En 1875 planteó su definición de entropía, como proporcional al número de posibles configuraciones distintas del sistema que sean compatibles con las propiedades macroscópicas. Así, para un gas aislado en un recipiente y en equilibrio, hay una cierta cantidad de configuraciones, entendiéndose por configuración a cada una de las posibles maneras en que se pueden distribuir las moléculas en el recipiente, y que produzcan como resultado idénticas propiedades macroscópicas de presión, temperatura, densidad, etcétera. Todas estas configuraciones tienen la misma probabilidad de presentarse, de modo que basta con calcular su número total para obtener la entropía del sistema.

Cuanto mayor sea este número, mayor es la entropía que se puede dar, entonces, como una cantidad numérica para un sistema en equilibrio, lo que constituye una gran mejora respecto de utilizar simplemente los conceptos de "orden" y "desorden", que son vagos.

Se podría considerar que el desorden o caos que reina en un gas en equilibrio se debe al gran número de moléculas. La existencia de caos determinista en sistemas con pocos grados de libertad demuestra que lo anterior no es obvio en absoluto. Se lo asocia más bien con la enorme diferencia entre los volúmenes ocupados por estados ordenados y caóticos en el espacio de las fases.

Recordemos que éste es un espacio matemático, cuyo número de dimensiones depende del número de variables independientes o grados de libertad del sistema dinámico a representar.

Si el sistema está formado por n partículas que no estén ligadas entre sí, habrá $3n$ coordenadas de posición y $3n$ coordenadas de impulso, lo que aun para unos pocos centímetros cúbicos de cualquier gas implica un número inmenso de dimensiones del espacio de las fases. Así, por ejemplo, para un centímetro cúbico de aire, que contiene unos 2.7×10^{19} moléculas, la cantidad de dimensiones del espacio de las fases es de alrededor de $6 \times 2.7 \times 10^{19}$ o 160 000 000 000 000 000 000.

Obviamente carece de sentido intentar visualizar tal "espacio". De todos modos se le puede esquematizar como si fuera tridimensional. Lo que interesa aquí es que si en un instante de tiempo dado, esa porción de aire tiene, por ejemplo, las siguientes propiedades macroscópicas observables: una temperatura de 20 grados centígrados, una presión normal de 1 013 milibares, un volumen de 1 cm^3; quedará representada dentro de una cierta región que designaremos como *H*, en el espacio de las fases (véase el capítulo III) y no necesitaremos preocuparnos por conocer el infinito detalle de todas las posiciones e impulsos individuales de las moléculas componentes.

Éstos quedan representados en cada uno de los puntos dentro de la región. A cada punto le corresponde un instante en el tiempo con una determinada configuración, una distribución en el espacio de las moléculas individuales del gas, cada una con su velocidad.

Un punto diferente simboliza otra distribución de posiciones y velocidades, pero si ambos puntos están contenidos en la misma región las propiedades macroscópicas son las mismas.

Se puede dividir así el espacio de las fases en un número de regiones, a cada una de las cuales le corresponde un conjunto de características macroscópicas observables diferentes.

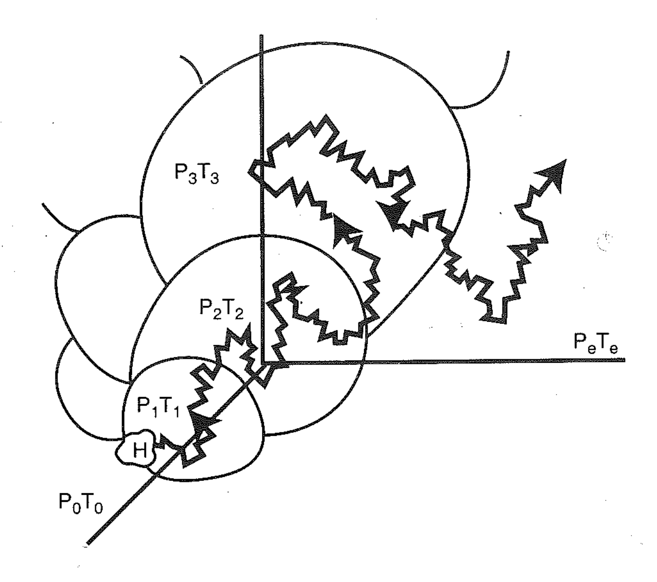


FIGURA V.3.

El tamaño de una región, que está dado por la cantidad de puntos que la componen, nos indica la cantidad de posibles distribuciones diferentes de las moléculas.

Y cómo evoluciona el gas con el tiempo se representa globalmente con la trayectoria que, saliendo del punto que indica la distribución de las posiciones y velocidades de las moléculas para el instante inicial, se desplaza por el espacio de las fases, y va emigrando de esa región inicial a otras a medida que cambian las características macroscópicas. En la figura V.3 se indican esas regiones por sus propiedades macroscópicas de presión *P* y temperatura *T*.

En un proceso termodinámico los tamaños de las distintas regiones pueden ser muy diferentes. Para un gas ideal, que esté comprimido en un cierto volumen dentro de una caja aislada y pase a expandirse hasta ocupar todo el volumen, se podrían estimar los tamaños relativos de las dos regiones correspondientes: la inicial y la final de equilibrio, designadas con P_0, T_0 y P_e, T_e en la figura V.3. Al llegar a esta última región, el gas estará en equilibrio térmico, el que se caracteriza porque sus moléculas están distribuidas de una manera uniforme en el vo-

lumen de la caja y se mueven en todas direcciones con un rango de velocidades conocido como "distribución de Maxwell".

Para poder tener una idea de los factores de magnitud en juego veamos un ejemplo muy simplificado: supongamos que hay un total de seis moléculas dentro de una caja dividida en dos partes. Hay varias posibilidades para su distribución en la caja: dos en una mitad y cuatro en la otra, cinco en una mitad y una en la segunda, etcétera. Las moléculas son idénticas, en su movimiento no distinguen diferencias entre las dos mitades, y se puede calcular fácilmente cuántas configuraciones posibles hay para cada distribución.

Resultan veinte combinaciones diferentes que dan una distribución uniforme de tres moléculas en cada mitad, contra seis donde las seis están en una de las dos mitades. Pero a medida que aumenta la cantidad de moléculas, la diferencia aumenta muy rápidamente: para 10 moléculas son 252, contra 10; para 20 moléculas son 1.3×10^{13}, contra 20; para 100 moléculas son 10^{29} configuraciones que dan distribuciones uniformes contra sólo 100 en las que las 100 están concentradas en una mitad.

Téngase ahora en cuenta la cantidad de moléculas que hay en un litro de cualquier gas, y se comprenderá que, en consecuencia, es inmensa la cantidad de posibles configuraciones con una distribución uniforme en la caja, en comparación con aquéllas donde se hallan todas en una mitad.

Como a cada distribución posible le corresponde un punto en el espacio de las fases, se deduce que la región correspondiente al gas en equilibrio térmico es, de lejos, la mayor en el espacio de las fases.

Supongamos ahora que partimos de la situación en que el aire está todo acumulado en una porción de la caja. Inmediatamente comenzará a expandirse ocupando cada vez más espacio hasta llenarla; después de un tiempo llegará al equilibrio térmico, con una distribución uniforme de temperatura y presión en toda la caja.

La entropía y el espacio de las fases

¿Cómo representaremos este proceso en el espacio de las fases? El punto parte de una región muy pequeña —la región que representa la colección de los posibles estados iniciales para

los que el gas está acumulado en un rincón de la caja—. Cuando el gas comienza a expandirse, la trayectoria del punto móvil entrará en una región del espacio de las fases de mayor tamaño, y luego a regiones más y más grandes mientras el gas siga expandiéndose, hasta que finalmente entra en la región de volumen más grande del espacio de las fases —la que corresponde al equilibrio térmico— que, por lo que hemos visto, ocupa prácticamente todo el espacio de las fases (figura V.3).

Por lo tanto, las oportunidades de que la trayectoria, después de haber abandonado ese pequeñísimo volumen de espacio de las fases para entrar al vasto dominio de la región de equilibrio térmico, vuelva a la región inicial son prácticamente nulas.

No es que haya una prohibición dictada por las leyes de la naturaleza: como hemos visto, todos los estados son posibles, pero la probabilidad de que la trayectoria encuentre nuevamente esa región es mucho menor que la de encontrar por casualidad una aguja en un pajar del tamaño del planeta.

Es fácil ver que no alcanzaría toda la edad del Universo para que espontáneamente volviese a aparecer justamente esa configuración con el gas acumulado en una porción de la caja. Lo que no deja de ser tranquilizador, pues la física nos asegura así que, si bien no es imposible, la probabilidad de que, de pronto, todo el aire de la habitación en que estamos se retire a un rincón, dejándonos sin poder respirar, es tan escasa que no ocurre ni siquiera una vez en muchos cientos de miles de millones de años, y esto en la práctica, para nosotros equivale a una imposibilidad.

Por todo lo anterior deducimos que, una vez que un gas ha llegado al estado de equilibrio térmico, no sale espontáneamente de él, pues aunque todos los otros estados son también posibles, éste es mucho más probable por un factor inmensamente mayor.

Además, si consideramos que la entropía del sistema es una medida del volumen de la correspondiente región del espacio de las fases, llegamos a la conclusión de que si la trayectoria que representa al gas parte inicialmente de la región de volumen muy pequeño, o sea con una entropía mínima, a medida que transcurra el tiempo pasará por regiones del espacio de las fases con volúmenes o entropías crecientes, hasta llegar al máximo de entropía en el equilibrio térmico.

Se llega así a la formulación de la segunda ley de la termo-

dinámica utilizando el concepto de la representación del sistema en el espacio de las fases. La entropía crece porque los estados fuera de equilibrio son muchísimo menos probables que los de equilibrio (ocupan volúmenes mucho menores en el espacio de las fases). Por lo tanto, una vez que el sistema en su evolución a lo largo del tiempo llega en el espacio de las fases a esa vasta región, es muy poco probable, aunque no imposible, que vuelva a la que corresponde a estados fuera de equilibrio.

VI. El comportamiento de los sistemas con gran número de componentes

EXAMINEMOS qué ocurre con sistemas formados por una inmensa cantidad de moléculas componentes como son los fluidos (líquidos, vapores, etcétera), cuando pasan bruscamente de un comportamiento ordenado a una confusión caótica.

No se trata aquí de buscar algún fenómeno exótico, que sólo se pueda observar tras las paredes de sofisticados laboratorios de física; en realidad, como veremos, esto es totalmente normal en nuestra vida cotidiana.

Observemos el humo que asciende por el aire desde un cigarrillo puesto en el cenicero o una vela que acaba de apagarse (figura VI.1). Asciende verticalmente durante varios centímetros, en una columna ordenada, casi rectilínea (flujo laminar), hasta que abruptamente aparecen torbellinos cada vez más complejos y termina en una nube totalmente desordenada que acaba por perderse en el aire.

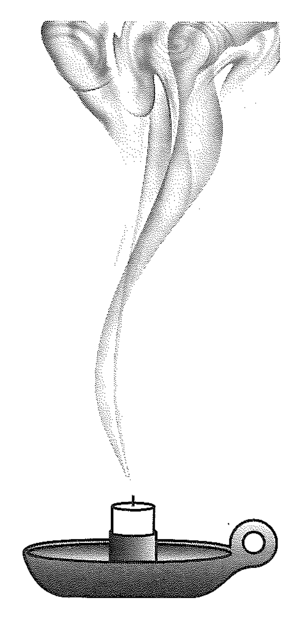


FIGURA VI.1.

Los millones de partículas microscópicas de ceniza caliente que forman

el humo, se mueven todos con la misma velocidad durante el ascenso en flujo laminar, como si se tratase de una autopista con columnas de autos manejados por conductores respetuosos de las leyes de tránsito. Tras la fase de remolinos, desembocan en la nube desordenada, y en ella las partículas de ceniza están animadas de movimientos en todas direcciones, de modo tal que si se quisiera medir la velocidad del humo en un punto de esa nube, se comprobaría que va variando de instante en instante en forma totalmente aleatoria, tan imprevisible como si los datos de las mediciones se obtuvieran jugando a la ruleta.

Turbulencia

Esta condición se denomina turbulenta; en física, un flujo se llama turbulento si la velocidad del fluido parece variar al azar tanto en el tiempo como en el espacio.

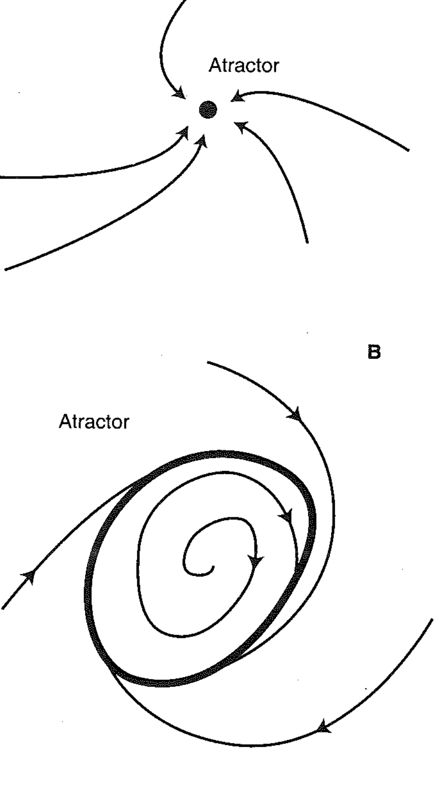
La turbulencia aparece con mucha frecuencia en los fluidos que encontramos en la naturaleza: en corrientes de aire, torrentes de agua, los procesos atmosféricos, corrientes oceánicas, procesos en la atmósfera de planetas tales como Júpiter, etcétera. Como es sabido constituye además uno de los grandes problemas de la tecnología moderna (en la industria aeronáutica, en las cañerías de transporte de petróleo o de agua), y a pesar de los esfuerzos realizados por muchos científicos, se está aún lejos de dominar sus principios fundamentales.

No obstante, algunas de las vías promisorias pasan por estudiar qué ocurre en un fluido cuando se produce la transición del orden laminar al caos de la turbulencia. Hasta 1970, se aceptaba la teoría del físico Lev Landau, quien entendía que en un sistema formado por tantas partículas, cuando se sale del flujo laminar y se inician los primeros remolinos, esto es equivalente al comienzo de las oscilaciones en un péndulo, es decir, aparece un movimiento periódico. Los remolinos iniciales se dividen muy pronto en remolinos más pequeños, lo que implica que aparecen inestabilidades en el fluido que lo hacen oscilar con otro periodo diferente adicional, y esto, a su vez, produce remolinos menores con nuevas oscilaciones. Así, la turbulencia sería inicialmente una superposición de tres o cuatro movimientos periódicos. Una vez que se desarrolla totalmente, el

número de oscilaciones diferentes sería infinito, como si se tratase de infinitos péndulos que se perturban mutuamente, y eso explicaría el comportamiento caótico de la velocidad del fluido.

Pero en 1970, los matemáticos D. Ruelle y F. Takens propusieron una interpretación distinta a la de Landau. Coincidían en la primera etapa del paso de flujo laminar a los primeros remolinos. Durante la etapa de flujo laminar, todas las partículas se mueven con prácticamente la misma velocidad en una misma dirección, de modo que la representación del proceso en el espacio de las fases es muy simple: un punto, que atrae las trayectorias de aquellas que se desvían por pequeñas perturbaciones (véase la figura VI.2*a*). Aquí el atractor puntual representa la velocidad constante del fluido.

Pero en realidad la velocidad va aumentando, debido a la fuerza ascendente del humo caliente, y cuando supera un cierto valor, se produce un cambio abrupto: ante la más pequeña perturbación, como puede ser una muy leve corriente de aire, las hileras o láminas de humo se desvían formando rulos que giran sobre sí mismos. Aparece aquí un movimiento rítmico, con un cierto periodo, que se puede representar en el espacio de las fases (véase la figura VI.2*b*) de la misma manera que para el caso de un péndulo, con un ciclo límite.



FIGURAS VI.2.*a* y *b*.

Este lazo es relativamen-

te estable, de modo que constituye un atractor. Pero al seguir moviéndose el remolino pronto sufre el efecto de alguna otra corriente de aire, que simultáneamente lo hace oscilar en otra dirección, con lo que tenemos un caso similar al del sistema formado por dos péndulos de distinto periodo del capítulo III. Vimos que la correspondiente representación en el espacio de las fases es el solenoide en la superficie de un toro tridimensional, de modo que nos encontramos con tres variables independientes o grados de libertad. ¿Qué ocurre de aquí en adelante?

Es en este punto donde se separan ambas teorías. Para Landau, una nueva perturbación introduce otra oscilación, que nos llevaría a una representación en un espacio de las fases de cuatro dimensiones, y así sucesivamente hasta llegar al caos con un espacio de las fases de un elevado número de dimensiones, que corresponden al elevado número de variables independientes del fluido turbulento. Para Ruelle-Takens, el caos se produce abruptamente y mucho antes: cuando se perturba al remolino que tiene dos frecuencias de oscilación simultáneas.

Lo anterior se visualiza no con una nueva figura en un espacio de las fases de cuatro dimensiones, sino alterando de raíz la forma del atractor que estaba sobre el toro (véase la figura III.13 de la página 71). Es como si el solenoide que formaba esa trayectoria hubiera estallado, produciendo una figura tan extravagante que Ruelle la llamó "atractor extraño". Este nombre fue desde entonces el que adoptaron los científicos para denominar a los atractores que indican un comportamiento que no se puede predecir a largo plazo.

Una sección de Poincaré del atractor extraño muestra una estructura fractal, de modo que el atractor que era bidimensional saltó a una dimensión mayor que 2 pero menor que 3.

Mediciones realizadas en laboratorios han confirmado la existencia de este atractor extraño, lo que señala una vía para formular las leyes de la turbulencia.

Otro aspecto importante de este hallazgo es que evidencia que también un sistema dinámico formado por un gran número de elementos puede llegar al comportamiento caótico a partir de sólo tres grados de libertad. Hasta entonces se opinaba que, como parece indicar el sentido común, sólo puede ha-

ber caos cuando el sistema tiene una gran cantidad de variables independientes.

Convección térmica

Un notable ejemplo de un fluido dando origen a un fenómeno de ordenamiento espontáneo se puede encontrar en la convección térmica, o sea el transporte de calor que efectúa un fluido caliente al desplazarse hacia una zona más fría.

Los primeros estudios los realizó H. Benard en 1900. El físico francés descubrió que si se calienta una capa delgada de un fluido (aceite), por debajo, éste puede organizarse espontáneamente en células de convección de un tamaño característico (véase la figura VI.3), similares a un panal de abejas. En cada una de las células de Benard sube fluido caliente por el centro y baja fluido frío por los bordes.

Hoy sabemos que este fenómeno de organización espontánea está muy difundido en la naturaleza: la superficie del Sol está cubierta de células de convección cada una de las cuales tiene un tamaño del orden de los mil kilómetros, y en general las mismas células se pueden observar en todos los fluidos en los que la convección térmica produce movimientos, cuando forman capas mucho más anchas que altas.

Esto vale también para la circulación del aire en la atmósfera y de las corrientes oceánicas, las que determinan en buena parte el clima a corto y mediano plazo.

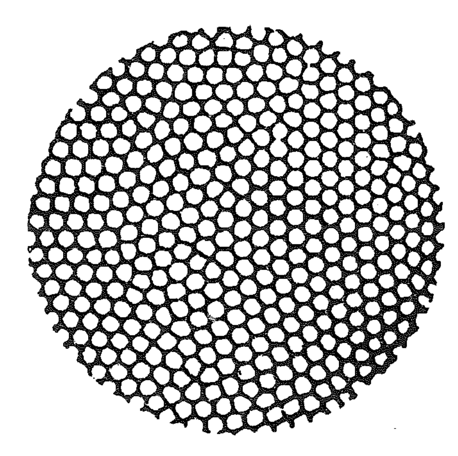


Figura VI.3.

Supongamos que ponemos agua o aceite en una sartén bien grande y calentamos uniformemente, de modo que el líquido en contacto con el metal tenga la misma temperatura en todas sus partes; al calentarse conducirá el calor hacia arriba, donde se disipará en la superficie del líquido. Tenemos así una conduc-

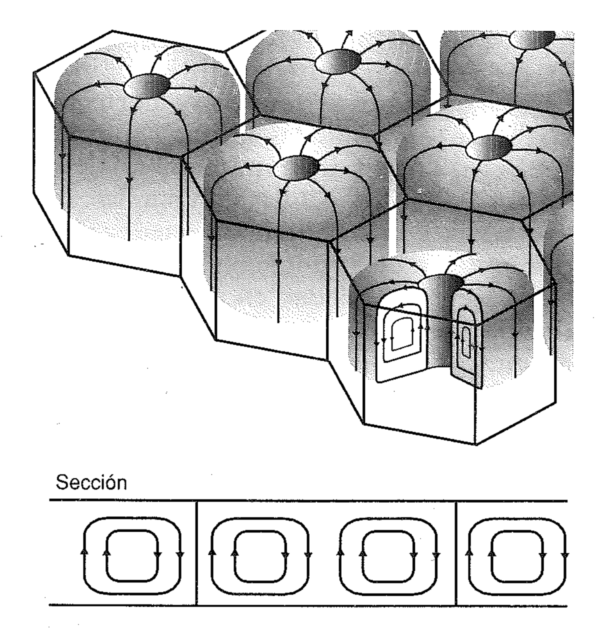


FIGURA VI.4.

ción térmica del calor. Pero si vamos aumentando la temperatura del calentamiento por encima de un cierto valor aparece súbitamente otro fenómeno, el de convección térmica con la formación de las células.

Lo que ocurre es que las capas inferiores de fluido, más calientes, se van dilatando, por consiguiente tienen menor densidad que las capas más frías que están encima, y al ser más livianas ascienden, siendo reemplazadas por esos volúmenes más fríos (figura VI.4). Éstos se calientan al ir acercándose al fondo, y simultáneamente los que ascendieron se enfrían, de modo que se produce un movimiento circular.

Es notable la complejidad de estos movimientos: una sección del fluido muestra la forma en que están coordinados los sentidos de circulación de las células adyacentes, alternadamente en el sentido de las agujas del reloj, o en el sentido contrario.

La correlación de los movimientos debidos al proceso de convección térmica es tanto más notable si se tiene en cuenta que el tamaño de estas células de Benard puede llegar a algunos milímetros, mientras que el rango de acción de las fuerzas entre

moléculas es del orden de un diez millonésimo de milímetro (10^{-7} mm). En cada célula hay alrededor de 10^{21} moléculas.

Debe destacarse que el experimento es perfectamente reproducible, o sea que repitiendo las mismas condiciones de calentamiento, se llega, a partir del mismo umbral de temperatura, a la misma formación de células con similar geometría y velocidad de rotación. Pero lo que no se puede controlar es el sentido de rotación: se sabe de antemano que con condiciones de la experiencia bien controladas, en determinada zona de la capa de fluido aparecerá una célula, pero es imposible predecir si rotará en un sentido o en el opuesto.

Repetidas pruebas han demostrado que la probabilidad de que la célula rote en un sentido o el otro es la misma para ambos casos, es decir que en un punto cualquiera del fluido, la velocidad tanto puede estar dirigida en un sentido como en el contrario. Esta propiedad se puede representar en una gráfica como la de la figura VI.5, donde la velocidad V está indicada en el eje vertical, con V^+ para velocidades de rotación en un sentido y V^- para el opuesto; en el eje horizontal, la variable R representa las condiciones de viscosidad, densidad, espesor, y la diferencia de temperatura entre la superficie inferior y la superior de la capa. Se comienza a calentar y R pasa de cero a valores crecientes, hasta que, a partir del valor crítico R_c, aparece una bifurcación de la curva: dos ramas iguales V^+ y V^-, siendo imposible determinar de antemano por cuál de ellas transitará el comportamiento del sistema dinámico, que evidentemente responde a condiciones no lineales, con sensibilidad a las condiciones iniciales.

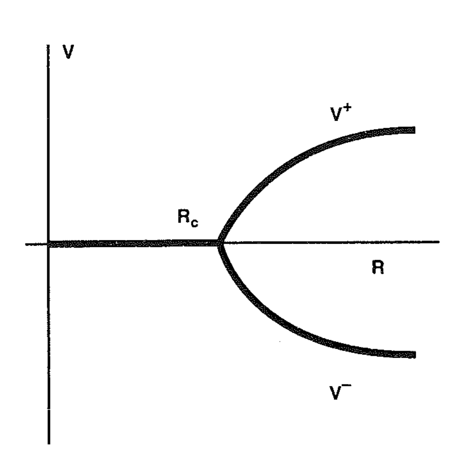


Figura VI.5.

Si se sigue aumentando la temperatura de calentamiento, súbitamente se borran las células, y comienza un movimiento aleatorio que es la iniciación de la turbulencia.

En 1987, los investigadores M. Dubois, P. Atten y P. Bergé hicieron mediciones en el fluido cuando aparecen las células de Benard y representaron las correspondientes oscilaciones térmicas en el espacio de las fases. Obtuvieron así un atractor extraño cuya sección de Poincaré tiene una dimensión entre 2.8 y 3.1, según las condiciones de calentamiento, lo que indica que el comportamiento del sistema se puede describir con un mínimo de cuatro grados de libertad.

La convección en la atmósfera y las predicciones meteorológicas

Como sabemos, cotidianamente los meteorólogos publican sus predicciones para el clima de los próximos días, con base en los datos de mediciones en la atmósfera, en la superficie terrestre y los océanos, y a observaciones satelitales. Poderosas computadoras procesan esos datos en centros de Estados Unidos y Europa, mediante modelos de la atmósfera como un sistema dinámico con más de un millón de variables independientes. Hay planes para aumentar cada vez más la potencia de esos centros de procesamiento de datos y también la cantidad y frecuencia de las mediciones en todo el planeta. Sin embargo, ningún meteorólogo serio cree que en algún futuro cercano se pueda afirmar en un pronóstico meteorológico algo así como "el viernes 26, o sea dentro de 12 días, en el Gran Buenos Aires las temperaturas máxima y mínima serán de 19 y 14 grados, con un 67% de humedad y un 53% de probabilidad de lluvias".

Actualmente, con todos los instrumentos modernos, el pronóstico empieza a ser incierto a partir de cuatro o cinco días. Ha habido casos (como en Inglaterra, 1987) en que no se pudo prever la aparición de un desastroso huracán 24 horas antes de que se presentase.

Se estima que en el futuro se podrá pronosticar hasta con 14 o 15 días de anticipación, y que más allá sólo habrá la creciente niebla de lo incierto. Pero nos estamos refiriendo a la predicción exacta para puntos individuales en el planeta; si, en cambio, consideramos el clima para toda una región, éste sí es predecible, con bastante más precisión que "en junio en la

provincia de Buenos Aires la temperatura oscilará entre 18 y 5 grados".

Al ser la atmósfera un fluido, se le estudia como un sistema dinámico formado por una inmensa cantidad de componentes, sujeto a turbulencias y convecciones. El Sol calienta la superficie de nuestro planeta, que a su vez eleva la temperatura del aire: en forma similar a lo que vimos cuando examinamos las células de Benard, al calentarse desde abajo la capa de aire que forma la atmósfera, aparecen convecciones.

La distancia entre el ecuador y los polos es de diez mil kilómetros, mientras que el espesor de la atmósfera es de unos diez kilómetros hasta la troposfera. En esta capa esférica de fluido en rotación aparecen células de convección distribuidas a lo largo de seis anillos que rodean el planeta, tres en el hemisferio Norte, y otros tres en el Sur, como se indica en la figura VI.6. Las flechas gruesas indican el sentido general de la rotación, y las finas la circulación adicional producida por la rotación del planeta (efecto Coriolis).

Hay además corrientes de aire de muy alta velocidad que circulan en la estratosfera, y que influyen decisivamente sobre el clima a largo plazo. Son células inestables, móviles, con límites y tamaños cambiantes. Sus características dinámicas pueden variar en magnitudes que se amplifican al doble aproximadamente cada par de días, y a su vez actúan sobre las corrientes de la estratosfera que modifican el clima desde las regiones templadas hasta las polares.

El comportamiento de la atmósfera constituye entonces un proceso no lineal, con realimentación,

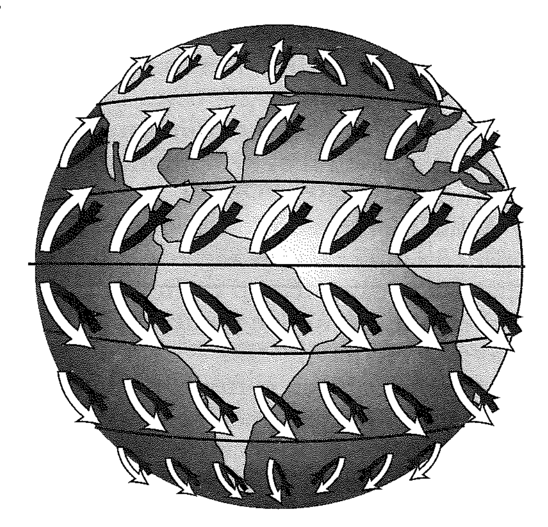


Figura VI.6.

altamente sensible a las condiciones iniciales, de modo que cumple las condiciones para que sea un sistema caótico. Es decir que no importa cuán complejos sean los modelos dinámicos, o cuán precisos sean los datos de las mediciones en tierra, agua y aire, las leyes de la física imponen un límite más allá del cual es imposible hacer predicciones meteorológicas.

Pero si bien no se puede predecir a más de cuatro o cinco días para un punto geográfico específico, ¿podría hacerse una predicción a más largo plazo, que diera la tendencia global para toda una región que tenga dimensiones relativamente grandes?

El meteorólogo Edward Lorenz se planteó este problema a comienzos de la década de los sesenta. En el Massachusetts Institute of Technology, donde investigaba, se estaba desarrollando el estudio de dinámicas no lineales, y decidió hacer un modelo atmosférico simple, de tres ecuaciones no lineales con sólo tres variables independientes en lugar de la inmensa cantidad que puede haber para ese sistema.

Representó la evolución del clima en un espacio de las fases de tres dimensiones y comprobó, para su sorpresa, que las correspondientes trayectorias daban origen a un atractor de una forma muy curiosa, con dos lazos semejantes a alas de mariposa (véase la figura VI.7). Había descubierto el primer atractor extraño. En este espacio de las fases, cada una de las alas del atractor representa un posible estado de la atmósfera, por ejemplo tiempo lluvioso en el ala izquierda, y tiempo seco y estable en el de la derecha. Si las condiciones iniciales son las que marca el punto 1 de la izquierda, la evolución seguirá la trayectoria que se mantiene en la misma ala: el tiempo será lluvioso. Pero una pequeña perturbación, que cambie las condiciones iniciales llevando a la atmósfera a la situación representada por el punto 2, nos lleva a la trayectoria 2, que evoluciona hacia el ala derecha, y el tiempo será entonces seco y estable.

El atractor de Lorenz tiene estructura fractal, con dimensión $D = 2.06$.

Lorenz publicó este hallazgo en 1963, siendo el primer ejemplo de un modelo calculado con sólo tres variables independientes donde aparecía un comportamiento impredecible a largo plazo.

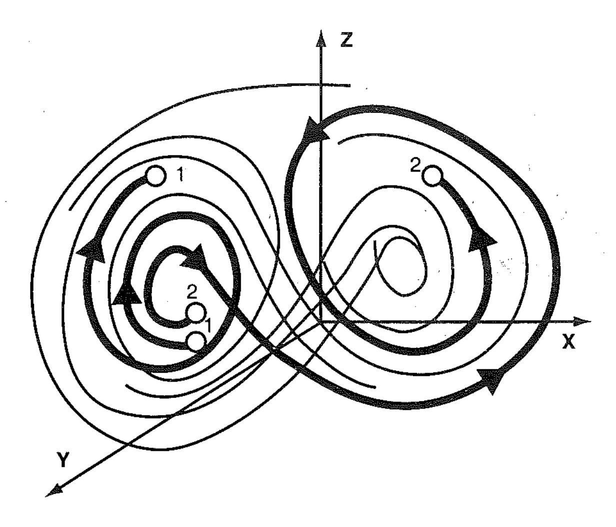


Figura VI.7.

El efecto mariposa

Lorenz acuñó su famosa expresión "efecto mariposa" como ejemplo de esta sensibilidad extrema a las condiciones iniciales: el batir de alas de una mariposa en el Amazonas hoy, podría producir una pequeñísima alteración en el estado de la atmósfera, que si se amplificase duplicándose cada par de días, iría haciendo diverger cada vez más lo que es respecto de lo que hubiera sido sin la mariposa, de modo que varias semanas más tarde aparecería un ciclón en el Caribe, que, de no haber existido el insecto en cuestión, nunca hubiera surgido.

El modelo de Lorenz con apenas tres variables describe sólo cualitativamente la forma caótica en que evoluciona el clima, pero lo hace de manera muy similar a los modelos de muchas variables independientes.

En la actualidad, los modelos de predicción meteorológica tienen alrededor de un millón de grados de libertad, y esto permite hacer pronósticos generales para regiones globales con una anticipación de hasta un mes.

VII. Los sistemas lejos del equilibrio

El surgimiento de la termodinámica fue un desafío para los físicos del siglo XIX, cuya escuela se basaba en los conceptos de Laplace, Lagrange, Hamilton y sus discípulos. Aquí aparecían para el estudio del calor ecuaciones tan universales como las de Newton, y que se referían al comportamiento global de la materia. Como hemos visto, para aplicar las leyes de Newton a los sistemas dinámicos, es preciso definir las posiciones y velocidades de cada uno de sus elementos componentes. Pero un gas, un líquido o un sólido tienen una cantidad inmensa de componentes (del orden de 10^{23} moléculas en un centímetro cúbico en un gas), de modo que se ignoraba por qué vía se podría establecer su comportamiento global partiendo del cálculo de los movimientos de sus moléculas.

Con la termodinámica surge un nuevo enfoque, donde las ecuaciones del calor, que también son universales, utilizan como parámetros propiedades colectivas, macroscópicas, tales como la presión y la temperatura, y no parecen requerir del conocimiento detallado de lo que ocurre con cada una de las moléculas participantes.

La termodinámica aparece entonces como una herramienta potencialmente valiosa para estudiar los procesos de cambio global de los sistemas dinámicos formados por una cantidad muy grande de componentes y, efectivamente, logró grandes avances durante el siglo pasado, en especial cuando, como hemos visto en el capítulo anterior, aplicó los conceptos de la mecánica estadística para vincular la presión y la temperatura con los efectos promedio del movimiento de un número muy grande de moléculas.

Se llegó así a interpretar satisfactoriamente mediante la ley de entropía la evolución hacia el equilibrio termodinámico de las estructuras aisladas que aparecen en la física y la química, cuyo ejemplo más conocido es el de los gases ideales.

La segunda ley de la termodinámica establece que, en general, las estructuras aisladas terminan por descomponerse, quedando reducidas a un movimiento desorganizado de sus elementos: las nubes de humo se disipan, las zonas calientes y las

zonas frías en un objeto se desvanecen hasta llegar a una temperatura uniforme.

La cantidad de entropía en el Universo —lo aleatorio, o desordenado— sólo puede aumentar, hasta llegar al máximo, dice la segunda ley. Pero, curiosamente, en la misma época en que se enunciaba esta ley aparecía la teoría de la selección natural para explicar la evolución de las especies. Mediante dicha teoría, Carlos Darwin intentaba dar cuenta del hecho de que los organismos vivos constituyen estructuras cada vez más organizadas: a partir de las bacterias se llega hoy a los mamíferos y al hombre. ¿Contradice este proceso de organización creciente la segunda ley de la termodinámica? En realidad, la existencia de seres vivos no es un desafío a esta ley, que se aplica a sistemas aislados.

Los sistemas abiertos pueden organizarse

Un sistema vivo es abierto: un hombre absorbe energía y materia de fuentes externas (el calor del Sol, el aire, carnes, verduras, fuentes que a su vez están estructuradas y, por lo tanto, son de baja entropía) y expele sus productos de desecho, que son de alta entropía por ser el resultado de la descomposición de materia organizada, a otros sistemas abiertos de su medio ambiente. Mientras un organismo esté vivo, se mantiene lejos del equilibrio termodinámico al que tienden los sistemas aislados.

Sabemos muy bien que si alguien se aísla por completo del ambiente exterior, en muy poco tiempo la inexorable segunda ley se cumple llevándolo a la muerte.

Durante bastante tiempo, muchos científicos pensaron que las leyes fundamentales de la física sólo permitían deducir que los sistemas deben llegar al equilibrio termodinámico y que, por lo tanto, el proceso de evolución biológica, con una creciente complejidad de los organismos vivientes, era una rara excepción.

Pero ni Boltzmann ni Darwin habían podido considerar la existencia de los fenómenos de formación espontánea de estructuras en la materia, una propiedad que se ha comenzado a estudiar en estas últimas décadas y que aparece con sorprendente frecuencia en la naturaleza.

Así, sistemas tan simples como una capa de líquido o una

mezcla de productos químicos pueden, en ciertas condiciones, exhibir fenómenos de comportamiento coherente espontáneo. Una condición esencial para que esto ocurra es que se trate de sistemas abiertos, mantenidos lejos del equilibrio termodinámico por fuentes de energía.

Es realmente extraordinario que enormes conjuntos de partículas, sujetas sólo a las ciegas fuerzas de la naturaleza, sean, sin embargo, capaces de organizarse en configuraciones de actividad coherente. Uno de los grupos que han promovido el estudio de este tipo de procesos —desarrollando así la rama de la termodinámica de sistemas lejos del equilibrio—, ha sido el de Ilya Prigogine y sus colaboradores, razón por la cual Prigogine recibió el premio Nobel de química en 1977.

Estos procesos ayudan además a comprender los mecanismos que llevan a las oscilaciones en ciertas reacciones químicas, conocimiento que tiene una gran trascendencia para los procesos catalíticos industriales, sin mencionar la importancia de este tipo de reacciones para los procesos bioquímicos en los seres vivos.

Reacciones químicas muy extrañas

Hemos visto que los fenómenos de convección térmica pueden llevar a un líquido o gas que parte inicialmente de un estado homogéneo a evolucionar y estructurarse con el tiempo, dando origen a formas regulares.

Una condición indispensable para que aparezcan células como las de Benard es que el sistema sea abierto, es decir con una fuente externa de energía, y que esté alejado del equilibrio.

Esta formación de células por convección es muy llamativa, pero parece un humilde fenómeno si se compara con los espectaculares efectos de las oscilaciones químicas, que se han comenzado a estudiar metódicamente a partir de 1980.

En 1958, el bioquímico ruso Boris Belousov hizo una mezcla de ciertos productos químicos que usualmente forman un líquido incoloro hasta que reaccionan, tornándose entonces de color amarillo pálido. Belousov había mezclado los ingredientes sin preocuparse por las proporciones utilizadas, y observó sorprendido que la solución cambiaba periódicamente su color, pasando a intervalos regulares de incolora a amarillo páli-

do para volver a hacerse incolora, lo que significaba que la reacción retrocedía y volvía a avanzar como si no pudiese decidir qué sentido tomar.

El pobre Belousov intentó publicar su descubrimiento en las revistas científicas, pero éstas se rehusaron. Los árbitros que evaluaron el trabajo consideraron que la única explicación posible para ese fenómeno era una mezcla ineficiente de los reactivos, pues las leyes de la termodinámica se oponen a la existencia de tales oscilaciones. Belousov murió sin haber logrado que se reconocieran sus investigaciones.

El escepticismo de los químicos de la época no debe sorprendernos demasiado. En efecto, en una reacción química típica entre dos reactivos A y B, sus moléculas se están moviendo al azar, y si una A y otra B colisionan pueden combinarse para formar una molécula C y otra D, que son los llamados productos de reacción. Esto se simboliza como:

$$A + B \rightarrow C + D$$

Los reactivos A y B van desapareciendo progresivamente a medida que aumenta la proporción de los productos C y D. Sin embargo, en un sistema aislado se observa que los reactivos A y B nunca se agotan del todo y que, con el tiempo, los cuatro, A, B, C y D, coexisten manteniendo fija la proporción de cada uno en la solución. Esta proporción ya no varía y se dice entonces que el sistema está en equilibrio químico, que corresponde al equilibrio al que llegan los sistemas según la segunda ley de la termodinámica.

Pero también se puede transformar este sistema en abierto, por ejemplo agregando continuamente más reactivos A y B, o retirando parte del C o D que se producen. Aquí también se puede comprobar que mediante la combinación adecuada de los flujos de entrada y salida, las proporciones van variando progresivamente con el tiempo hasta hacerse fijas, aunque con valores distintos a los del sistema aislado, resultado que, una vez más, es esperable de acuerdo con las leyes de la termodinámica.

Pero lo que afirmaba Belousov implicaba que estas combinaciones en lugar de crecer progresivamente con el tiempo hasta alcanzar un equilibrio estable, podían retroceder hacia el estado inicial, lo que equivale a contradecir el segundo principio

de la termodinámica, y además podían hacerlo repetidamente, oscilando en un sentido y el otro.

Los fenómenos periódicos o de oscilación son ubicuos en la física, la astronomía y la biología, pero los químicos creían que las reacciones eran inmunes a esa clase de comportamiento.

No se espera usualmente que las concentraciones de los productos intermedios de la reacción alcancen un cierto nivel, luego caigan a uno inferior, luego suban y caigan repetidamente hasta que en algún punto resulten productos estables resistentes a cambios ulteriores. De todos modos, en algunos laboratorios de Moscú se siguió utilizando la "receta" de Belousov como una curiosidad de la química, y al comenzar la década de los sesenta, Anatol Zhabotinskii retomó el tema para su tesis de doctorado. Hizo investigaciones sistemáticas cambiando los reactivos para obtener colores que contrastaran mejor.

En la reacción ahora llamada BZ (Belousov-Zhabotinskii), la oscilación se manifiesta por el cambio regular entre el rojo y el azul. Se logra disolviendo en agua a una determinada temperatura ciertas proporciones de ácido sulfúrico, ácido malónico, bromato de potasio y sales de cerio y hierro. Las oscilaciones entre el rojo y el azul resultantes tienen un periodo de casi un minuto y pueden durar varias horas.

Además pueden producirse oscilaciones en el espacio: si se vierte algo de esa solución en un disco formando una capa de poco espesor, aparecen unas figuras hermosas, con círculos concéntricos o espirales azules sobre un fondo rojo, que giran en un sentido o el opuesto y que van cambiando con el tiempo. La figura VII.1 muestra una sucesión de fotografías de estas ondas.

Actualmente la reacción BZ y otras similares se estudian en lo que se denomina reactor de flujo continuo, introduciendo continuamente los reactivos y retirando el exceso de los productos para mantener el volumen constante. Se puede controlar así rigurosamente la reacción y mantenerla como un sistema químico abierto, lejos del equilibrio.

Realimentación y catálisis

Al día de hoy se han estudiado en detalle todas las etapas de este tipo de reacciones, planteando las correspondientes ecua-

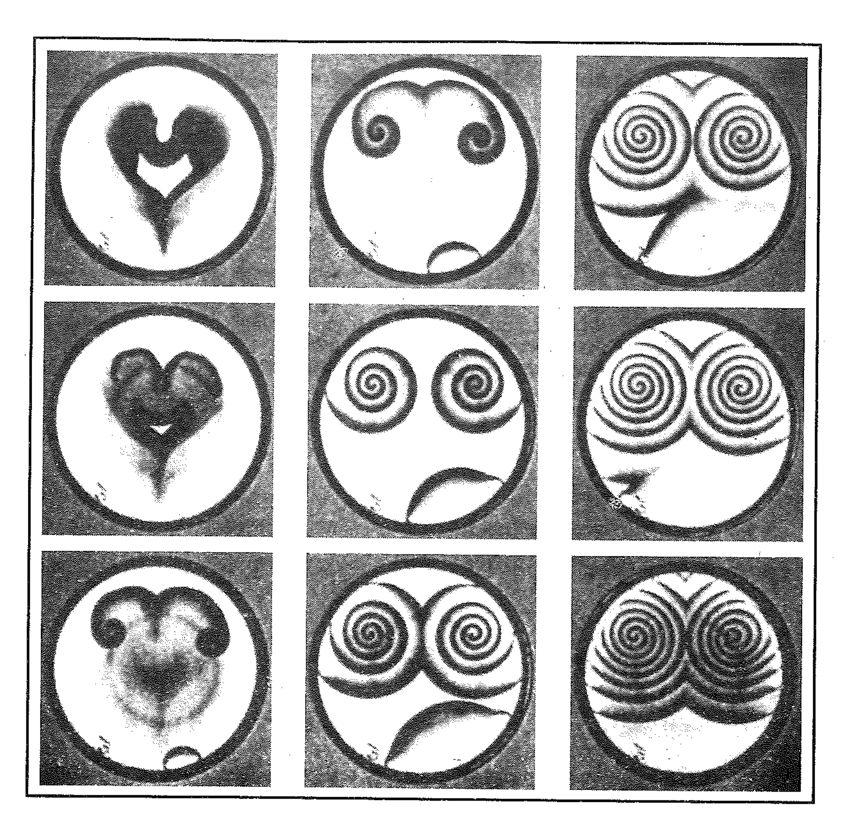


FIGURA VII.1.

ciones, y con ellas se ha logrado simular por computadora las oscilaciones. Se sabe ahora que las condiciones para que éstas aparezcan son que, además de tratarse de un sistema alejado del equilibrio, debe haber una realimentación, es decir que alguno de los productos que aparecen en una etapa del proceso sea capaz de influir sobre su propia velocidad de formación. En la química esto se denomina "autocatálisis".

Un catalizador influye sobre la velocidad con la que reaccionan químicamente las sustancias presentes y se mantiene sin cambios durante este proceso. En la autocatálisis, si la sustancia que se va produciendo actúa sobre su propia velocidad de producción incrementándola, lo que aumenta su concentra-

ción y, a su vez, produce más cantidad de esa sustancia, se tiene una realimentación positiva, que responde a una ecuación no lineal.

Variando el flujo de entrada de reactivos en el reactor de flujo continuo, el sistema químico puede pasar a uno cualquiera de dos estados estables diferentes, cada uno de los cuales tiene su propio periodo de oscilación, es decir que aparecen bifurcaciones para la posible evolución del sistema, las que recuerdan a las encontradas en la dinámica de flujo de fluidos.

Para algunos rangos del flujo en el reactor aparece un comportamiento más complejo, con una mezcla de varias frecuencias de oscilación de diversas amplitudes. La explicación corriente es que, a diferencia de una reacción química "normal", en la que los reactivos y productos se mantienen uniformemente distribuidos en la solución, aquí una pequeñísima heterogeneidad o diferencia en un punto se incrementa por el efecto de autocatálisis, de modo que, en una región, una sustancia química determinada puede dominar la reacción mientras que, en la vecina, su concentración se agota. Así se activan complejas oscilaciones en el sistema de reacción.

Un oscilador químico, por ejemplo, puede ser inicialmente de un color rojo uniforme y, cuando sigue la reacción, aparecen puntos blancos que se transforman en anillos concéntricos azules, que se aniquilan al colisionar entre sí. Se tiene entonces la situación de sensibilidad a las condiciones iniciales que, como hemos visto, caracteriza a los sistemas dinámicos no lineales y, efectivamente, representando la evolución de estos sistemas químicos en el espacio de las fases aparecen atractores extraños.

Hay que tener en cuenta que se emplean catalizadores en muchos procesos importantes, como los vinculados al petróleo por ejemplo, de modo que la comprensión detallada de la dinámica de las reacciones químicas que son significativas para la industria puede tener grandes consecuencias económicas.

Por otra parte, estos relojes químicos recuerdan a los ritmos naturales que aparecen en los organismos vivos. Si se tiene en cuenta que en las reacciones bioquímicas también aparecen las realimentaciones, producidas por el efecto catalítico de las enzimas, y que los seres vivos son sistemas alejados del equili-

brio, es de esperar que este nuevo enfoque ayude a comprender el comportamiento de muchos mecanismos biológicos.

VIII. ¿Cómo definiremos la complejidad?

HASTA ahora hemos usado el término complejidad para un estado en el que muchos factores diferentes interactúan entre sí. Pero hay que dar mayor precisión a este concepto, ya que la complejidad de un sistema no debe confundirse con que un sistema sea meramente complicado. En realidad debería hablarse de comportamiento complejo en un sistema, ya que, como hemos visto, un sistema dinámico puede ser muy simple pero exhibir en ciertas condiciones un comportamiento inesperado de características muy complejas que llamamos caótico.

ENTRE EL ORDEN Y EL CAOS: LA COMPLEJIDAD

Un cristal de cuarzo es un sistema ordenado, con sus átomos vibrando alrededor de posiciones netamente fijadas en la red cristalina; un virus tiene características de orden en su estructura, similar a un cristal orgánico, pero cuando infecta una célula, súbitamente comienza a replicar genes como un organismo vivo: es complejo; el movimiento de las moléculas de un gas en equilibrio térmico es verdaderamente caótico. La complejidad cubre así un vasto territorio que está entre el orden y el caos.

No hay actualmente acuerdo acerca del significado de "complejidad". Todos sabemos que los seres humanos tienen mucha complejidad, y que los peces tienen bastante; los hongos son algo complejos, y los virus, menos. Las galaxias son complejas, pero en un sentido diferente.

En todo esto coincidimos, pero ¿podríamos ponernos de acuerdo en usar una definición más científica, que especificara cuantitativamente cuánta más complejidad tiene una planta que una bacteria?

En las ciencias físicas, una ley no es ley si no se le puede expresar en lenguaje matemático; ningún científico se entusiasmaría por medidas de complejidad que sonaran así: "un pez es bastante más complejo que un virus, pero un poco menos que un mamífero".

Podría parecer que esta dificultad en hallar una buena definición de complejidad desaparece si nos olvidamos de los organismos vivos y la aplicamos sólo a los sistemas dinámicos formados por materia inerte, en los que es más sencillo saber si son o no complicados.

Pero tampoco es exactamente así. Según las condiciones del sistema, se puede tener orden o complejidad y hasta caos, ya se trate de uno con sólo tres componentes o con una enorme cantidad de ellos.

Es el territorio de la complejidad, que está situado entre el orden y el caos, el que constituye el nuevo desafío para la ciencia.

De todos modos, resulta difícil poder predecir que esta búsqueda de una definición precisa de la complejidad termine con el hallazgo de una única magnitud que nos dé un número para ingresar a las ecuaciones de la física, como ocurre con la velocidad, la presión o la masa.

Al fin y al cabo, la complejidad de una galaxia implica una relación entre sus estrellas componentes cualitativamente diferente de la que existe entre las células que forman a un cordero. No parece que esta diferencia se pueda reducir a una única magnitud similar a la temperatura.

Posiblemente la mejor solución al problema sea la propuesta por los especialistas en computación. En la actualidad la mayoría de los científicos que se dedican a tratar de definir la complejidad pertenecen a dicha área, cuya tradición es ver prácticamente todo como reducible a información y, por lo tanto, cuantificable en términos de *bits* y *bytes*.

¿Cómo medir la complejidad?

Si se adopta este punto de vista, entonces se podría medir la complejidad en función de, por ejemplo, el tiempo que requiere una computadora para ejecutar un programa que simule un proceso físico complejo.

En principio no hay límite para los tipos de procesos que se pueden simular con un programa, de modo que ésta sería una buena base de partida para la definición que buscamos. Así, los fenómenos complejos incluyen no solamente enjambres de símbolos (números, programas de computadora, palabras), sino procesos físicos y organismos vivos.

Dicho enfoque comenzó con la publicación en 1948 de un trabajo de Claude Shannon, de Bell Telephones, sobre la teoría matemática de la comunicación, que condujo a buscar un equivalente de la segunda ley de la termodinámica para la información.

Como consecuencia de esa presentación, los científicos se habituaron a mirar los entes físicos —bicicletas o flujos de petróleo— y preguntarse: ¿cuánta información requiere describir este sistema?

Por otra parte el fenomenal avance en la capacidad de las computadoras ha impulsado el enfoque computacional de los procesos en sistemas físicos, combinando observaciones de dichos sistemas con la construcción de modelos para computadora. Se simula así un proceso, para obtener resultados que tradicionalmente sólo se lograban modificando las condiciones físicas del sistema y midiendo su efecto. Esto resulta especialmente útil para sistemas como los que se estudian en cosmología, donde no se puede alterar por ejemplo la estructura de un planeta, o en las ciencias sociales, donde no se pueden cambiar las condiciones económicas de una nación para ver qué variables son las importantes.

Puesto que muchos procesos de la naturaleza son expresables mediante modelos que permiten simular su evolución con una computadora, se podría intentar medir la complejidad de un sistema por la dificultad para representarlo con un algoritmo, es decir con un programa de computadora. ¿Cómo se mide esa dificultad?

Se han propuesto diferentes fórmulas, como la de medir el tiempo mínimo necesario para que una máquina ejecute el programa, o también medir la capacidad mínima de memoria que debe tener la computadora para correr ese programa. Pero como estas magnitudes dependen del tipo de máquina utilizada, es necesario referirlas a alguna computadora ideal que actúe como un patrón normalizador.

Esta máquina abstracta fue ideada por el matemático inglés Alan Turing en 1936. Se le puede considerar como un artefacto mecánico con una impresora, a través del cual pasa la memoria, consistente en una cinta de papel tan larga como sea necesario y sobre la que está marcada una secuencia de espacios; cada uno de los espacios puede estar en blanco o marcado con una raya, lo que equivale a la notación binaria 0 y 1 respectivamente (véase la figura VIII.1). La máquina puede realizar una de cuatro operaciones cada vez que utiliza la memoria, o sea cuando va recorriendo los espacios de la cinta y los lee: moverse un espacio hacia adelante, o retroceder un espacio, o borrar una raya, o imprimir una raya. Como la cinta es tan larga como se necesite, se entiende que la máquina tiene capacidad ilimitada de almacenamiento de datos, además de que no se le fija limite de tiempo para completar sus operaciones.

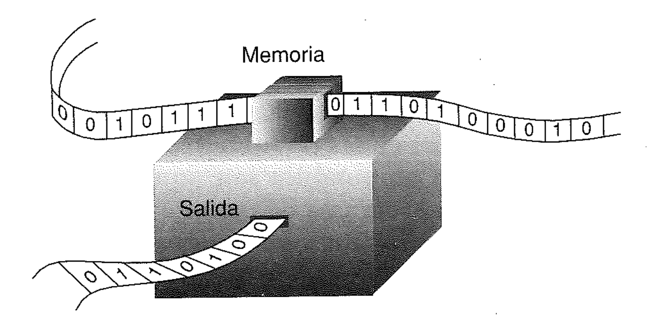


FIGURA VIII.1.

La máquina comienza a operar en cuanto se le introduce el programa, y continúa hasta que termina de imprimir el resultado. De este modo es capaz de efectuar todo programa expresado en código binario, o sea, en un lenguaje matemático formado por los dos únicos signos 0 y 1.

Lo que caracteriza a la máquina universal de Turing es que, dado el programa de entrada adecuado, puede simular el comportamiento de cualquier otra computadora digital, aun

la más compleja. Obviamente es muchísimo más lenta, de modo que nadie ha intentado construir una, a pesar de su simplicidad.

Tenemos ahora el instrumento para medir con precisión la cantidad de información que enviamos en un mensaje: la unidad fundamental de información es el bit, que se define como la información más pequeña capaz de indicar una elección entre dos cosas igualmente posibles. En la notación binaria, un bit equivale a un dígito, y puede ser 0 o 1. Así, por ejemplo, el número 29 se escribe 11101 en el código binario y, por lo tanto, contiene cinco bits de información.

He aquí, entonces, la normalización buscada, que permitiría medir la complejidad independientemente del tipo de computadora empleado.

Hay números que son computables y otros que no lo son

Tratemos ahora de definir con más precisión la complejidad. Parece sensato intentar hacerlo empezando con objetos abstractos como lo son los números, ya que las relaciones entre los mismos ya son, obviamente, cuantitativas.

Turing distinguió dos clases de números: los computables y los no computables. Computables son aquéllos para los que existe un algoritmo, o programa de computadora, que corrido en la máquina nos proporciona el número, no importa cuán grande sea éste, que inclusive puede ser infinito.

Para aclarar este concepto vamos a suponer que tenemos una computadora conectada vía satélite con otra que utiliza un amigo que vive en Japón, al que necesitamos transmitirle ciertos números. Como sabemos que cuanto más segundos de transmisión requiera nuestro mensaje tanto mayor será la cuenta que nos presentará la compañía, nos conviene comprimirlo al máximo. Para ello conviene ver si tiene alguna característica que ayude a tal fin.

Supongamos que deseamos enviar un número como, por ejemplo:

1234567891011121314151617181920212223242526272829303132

Al examinarlo hallamos que sus dígitos se forman escribiendo los primeros 32 números enteros en orden. Su estructura sigue una ley perfectamente determinada, por la que sé que el dígito *7* está seguido por el *8*, luego viene el *9*, etcétera. Por lo tanto, bastaría con transmitir un mensaje con las instrucciones para construir ese número.

El correspondiente algoritmo a transmitir es un programa muy corto, que básicamente ejecute la siguiente instrucción:

"Imprima los 32 primeros enteros en orden"

La computadora de nuestro amigo le proporcionará el número, que puede ser tan grande como queramos cambiando muy poco la longitud del programa (por ejemplo, "Imprima los 1 000 primeros enteros en orden").

En cambio, un número no computable es aquel cuyo único algoritmo posible resulta ser ese mismo número escrito en el programa.

Esto lo entenderemos fácilmente si queremos transmitirle a nuestro amigo de Japón un número que hemos construido arrojando un dado muchas veces y anotando las cifras del *1* al *6* que se van obteniendo sucesivamente. Así después de tirar el dado 25 veces obtuvimos este número:

3546221356431142652142663

En este caso, como cada dígito fue generado al azar, no tiene relación alguna con el que lo sigue o precede, de modo que el único algoritmo que puede reproducir el número es el programa que simplemente lo copia:

"Imprima 3546221356431142652142663"

Del mismo modo, si deseara transmitir el número que obtuve cuando seguí arrojando el dado hasta completar mil tiradas, no tengo otra posibilidad que recurrir al programa:

"Imprima 3546221356431142652142663..."

Donde los puntos suspensivos significan los otros 975 dígitos del 1 al 6. Deberé resignarme al hecho de que el mensaje con el programa sigue siendo tan largo como el número.

Resumiendo, para un número computable es posible escribir un programa de computadora relativamente corto que lo calcule, aunque el número sea infinitamente largo. En cambio, para un número generado al azar, al no ser computable, el programa que lo calcule ha de contener ese mismo número y será, por lo menos, tan largo como aquél.

Así, la complejidad de un número se podría medir por la cantidad mínima de instrucciones de un programa de máquina de Turing —es decir, su longitud-mínima— capaz de reproducir el número.

En consecuencia, un número generado al azar corresponde a una alta complejidad —el caos—, mientras que un número computable es ordenado, tiene baja complejidad. En el medio quedarían los números complicados, generados por una combinación de aleatoriedad y orden.

Pero, ¿qué relación puede haber entre estas consideraciones válidas para entes matemáticos y los sistemas de objetos de la naturaleza cuya complejidad intentamos estimar?

Una pista para ver la relación está dada por el hecho de que el código binario que usa la computadora para expresar cualquier número puede expresar también cualquier otra información. Las 28 letras del alfabeto se pueden hacer corresponder con 28 diferentes secuencias de unos y ceros, lo mismo que los signos de puntuación, etcétera; esto nos permite, por ejemplo, considerar la complejidad en la construcción de palabras en un idioma.

Algo ordenado sería una hilera de letras como *aaaaa,* porque se le puede escribir en un programa concisamente como "5 × *a*". En cambio, una secuencia al azar de letras, como *dcflksivgdhglkjthlakijgueernsedgmk,* es caótica, no tiene un programa que la imprima que sea más conciso que la secuencia misma. Entre ambos extremos está la complejidad que aparece en la forma en que se agrupan las letras para formar palabras y frases.

Este método también permite codificar la información que corresponde a los objetos físicos. Así, un objeto ordenado, como un trozo de cristal formado por átomos de carbono (un

diamante), se podría formular en un algoritmo que especificara la cantidad de átomos de carbono que lo forman como, por ejemplo, "$10^{27} \times$ carbono".

Del mismo modo, las plantas, personas y bacterias serían similares, en este enfoque, a palabras, frases y párrafos: mezclas de orden y aleatoriedad.

La complejidad algorítmica se define como la longitud del programa más corto que puede hacer una computación.

Un planteo semejante se encuentra en la teoría algorítmica de la complejidad formulada por Andrei Kolmogorov, Gregory Chaitin y Ray Solomonov. Esta teoría considera la computación de la magnitud física *Q* especificada como una secuencia de dígitos *S*, y establece que *S*, y por lo tanto *Q*, es aleatorio si el programa de cómputo mínimo requerido para obtener *S* es el programa que todo lo que hace es copiar *S*:

"Imprima S"

También se puede definir por este método la complejidad computacional, que es la cantidad de tiempo que necesita una computadora para resolver determinado problema y que mide, por lo tanto, su dificultad.

Se comprueba que hay dos tipos básicos de sistemas dinámicos cuyos movimientos se pueden computar: los sistemas ordenados y los sistemas caóticos. Los primeros, como es el caso del oscilador armónico, tienen órbitas que requieren una cantidad de información de entrada, o sea una secuencia de unos y ceros, cuya longitud es relativamente corta, pero el proceso de computación correspondiente da como resultado una información de salida mucho mayor. La información de entrada es de corta longitud debido a que las trayectorias inicialmente cercanas del sistema se apartan con lentitud a medida que pasa el tiempo, de modo que no es necesario conocer todos los dígitos de la información inicial para poder predecir mediante la computación los estados futuros.

Desde el punto de vista de la complejidad computacional, el tiempo requerido para computar una trayectoria es propor-

cional al logaritmo del tiempo del sistema. Así, si se calcula la trayectoria para el tiempo t = 15 segundos, se requerirá un tiempo de computación de 1.17, y para t = 150 000 segundos, un tiempo de 5.18, siempre mucho menor que el que requiere el sistema para recorrer esa trayectoria.

En cambio, para los sistemas caóticos, la cantidad de información de entrada es la misma que la de salida, ya que las trayectorias inicialmente cercanas divergen exponencialmente con el tiempo, y esto trae como consecuencia que cada segundo de tiempo del sistema se pierda un dígito decimal de precisión en la información de salida. Para mantener el grado de exactitud en la información de salida es necesario, entonces, compensar esa pérdida agregando un dígito más de precisión en la información de la entrada y, por lo tanto, si se desea integrar con exactitud una trayectoria caótica, hay que introducir tanta información como la que se extrae.

Si se examina esto desde el punto de vista de la complejidad computacional en lugar de la complejidad algorítmica, se ve que el tiempo que requiere la computadora para calcular una trayectoria caótica es proporcional al que requiere ese sistema caótico para recorrerla, de tal forma que la computadora necesita tanto tiempo para calcular como el sistema caótico mismo para ejecutar el proceso, y por lo tanto, no es posible hacer una predicción.

Todos estos métodos permiten cuantificar la complejidad de los procesos extremos de orden y caos, pero no son muy satisfactorios para la complejidad que está entre ambos. En efecto, la complejidad de un sistema dinámico como el de un organismo vivo es, siguiendo las definiciones anteriores, menor que la de un gas en equilibrio termodinámico, ya que en este último la entropía ha llegado a su máximo y el movimiento de sus átomos es totalmente aleatorio. Esto parecería implicar que complejidad y aleatoriedad son equivalentes, lo que no lleva a ninguna parte si la intención es comprender la complejidad de los sistemas que exhiben una organización, como se encuentran abundantemente en la naturaleza. La idea de complejidad no coincide con la de entropía, pues hay sistemas que pueden tener igual orden, o igual desorden, y diferir en complejidad.

C. Bennett, de IBM Research, y otros investigadores han pro-

puesto un enfoque diferente, que dé como resultado una definición con la que la complejidad de un pez sea mayor que la de un cristal o que la de un gas.

La evolución de la vida en la Tierra nos muestra organismos cada vez más organizados, es decir que algo que podemos llamar complejidad aparece como aumentando, a pesar de que la cantidad de orden en el Universo está disminuyendo.

La propuesta de Bennett es medir ese proceso de organización, en especial para los sistemas autoorganizados que aparecen en la naturaleza. Lo que los caracteriza es que, además de ser complejos, parten inicialmente de sistemas simples (una lámina de fluido que se calienta, una solución de sustancias químicas, un huevo fecundado...). La idea de organización o complejidad de un sistema estaría así estrechamente vinculada al proceso por el que se puede ir de ese sistema inicial simple al sistema complejo totalmente desarrollado.

La complejidad se mediría entonces por el tiempo que le llevaría a una computadora simular todo el desarrollo de ese sistema hasta llegar a su organización definitiva, y contando el número de "pasos lógicos" a lo largo del proceso. Se tienen como algoritmo de entrada las reglas básicas de su crecimiento, que incluyan, por ejemplo, los datos genéticos, si se trata de los seres humanos. Así, considerando como teoría del origen de la especie humana la selección natural, el número de pasos lógicos sería el número estimado de veces que nuestro material genético ha sido modificado a partir del que estaba contenido en una bacteria inicial. La complejidad se mediría entonces por el tiempo que requeriría una computadora para simular dicha evolución pasando por todos esos pasos lógicos.

Pero ninguna de las mencionadas definiciones de la complejidad que está entre el orden y el caos ha sido aceptada por la comunidad científica como totalmente satisfactoria, hay nuevas propuestas y el debate continúa aun. Por otra parte, la falta de definición no es impedimento para que el tema de la complejidad en sí esté registrando progresos importantes, en un proceso que se asemeja al que acompañó a la comprensión de la naturaleza del calor y su relación con la energía. Los avances en la ciencia del calor se fueron realizando desde principios del siglo XVIII, pero a mediados del siglo XIX se le pudo definir con precisión basándose en la teoría cinética. Es de esperar

que los avances actuales permitan definir la complejidad en un tiempo mucho más breve.

IX. Aplicaciones en biología y economía

EXISTE una ecuación matemática especialmente adecuada para examinar estas propiedades comunes a varios sistemas y dada su importancia pasaremos a describirla.

LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Se trata de la ecuación logística, que es una ecuación simple, muy fructífera por la cantidad de aplicaciones en muchos campos de estudio de sistemas complejos: ecológicos, biológicos, económicos, etcétera.

Es una ecuación que opera sobre un número y lo transforma en otro sobre el que vuelve a operar, y así reiteradamente, en un proceso iterativo. Sus características especiales sólo se evidencian cuando el número de iteraciones es grande, de modo que para aplicarla se requiere al menos una calculadora de bolsillo, aunque una computadora es la herramienta más adecuada.

La ecuación logística produce sobre un número cualquiera dos efectos que se oponen: *1)* lo incrementa, produciendo otro número mayor que, a su vez, es vuelto a incrementar por la ecuación y así reiteradamente; *2)* va reduciendo esos números resultantes a medida que crecen, de modo que se tiene aquí un proceso con una realimentación controlada.

¿Qué ocurrirá cuando la ecuación haya operado un buen número de veces? El sentido común nos indicaría que debe resultar finalmente algún número intermedio, ni demasiado grande ni demasiado pequeño.

Pero aquí viene la gran sorpresa: esto puede ser totalmente equivocado, tan equivocado que nos podemos topar también aquí con comportamientos insospechados, de aspecto caótico.

La ecuación lógica fue propuesta en 1845 por el sociólogo y matemático Pierre Verhulst; sus sorprendentes propiedades fueron puestas de manifiesto por el físico y biólogo Robert May en la década de 1970, cuando la aplicó al estudio de la dinámica de las poblaciones de plantas o animales. En dichas poblaciones hay una realimentación en cada ciclo vital por la reproducción controlada por el efecto negativo de los depredadores o de la creciente escasez de alimento, que impide así que esas poblaciones crezcan explosivamente. La ecuación permite calcular, partiendo de las características de la población en un momento dado, cómo irán variando éstas con el tiempo.

Deseamos saber cómo variará anualmente la cantidad de individuos de una población, de la que sabemos que en el año inicial hay 1 000 y que aumenta con un ritmo constante de 10% por año.

Si no existiera el control de los predadores o de la disponibilidad de alimentos, podríamos hacer la siguiente tabla:

Año	*Número de individuos*	*Total*
0	1 000	1 000
1	1 000 + 100	1 100
2	1 100 + 110	1 210
3	1 210 + 121	1 331

Y así sucesivamente.

Este procedimiento se puede expresar matemáticamente con la ecuación:

$$X_{t+1} = K \times X_t$$

Donde t indica la cantidad de años transcurridos a partir del año inicial que es $t = 0$, y X es la variable que simboliza la cantidad de individuos. Así, X_t es esa cantidad en el año t, y X_{t+1} en el año siguiente.

El parámetro K nos indica la tasa anual de aumento de X; en el ejemplo anterior es $K = 1.1$.

Por lo tanto, lo que nos dice esta expresión es que si sabe-

mos cuál es la población en el año *t*, basta con multiplicar el número correspondiente por la tasa de aumento K para determinar la población que habrá en el año siguiente.

Para facilitar los cálculos se trabaja con un X normalizado, es decir que sólo pueda variar entre 0 y 1. Así, $X_t = 1$ corresponde al máximo posible para esa población, o sea al 100%, y $X_t = 0.5$ al 50%, y no importa si estamos considerando 15 950 conejos o 12 millones de árboles; todo lo que nos interesa es calcular la variación anual de la población en relación con los valores anteriores o siguientes.

Volviendo al ejemplo, evidentemente ese incremento de 10% anual nos llevará a una situación imposible: si comenzamos con 1 000 conejos en el año cero, 200 años después habría unos 19 mil millones de conejos cubriendo la superficie del planeta; se requiere entonces agregar a la ecuación un término que refleje la situación real, en la que el alimento no va a alcanzar para alimentar a la creciente población, y además habrá cada vez más zorros y otros predadores que se alimentan de conejos.

La ecuación logística es, en definitiva, la siguiente:

$$X_{t+1} = K \times X_t(1 - X_t)$$

Ejecuta así dos acciones opuestas; cuanto más crece el factor X_t, tanto más disminuye el factor $(1 - X_t)$ reduciendo el resultado final.

Si, por ejemplo, K es 1.1, para un X_t pequeño de 0.1, resultaba con la primera ecuación:

$$X_{t+1} = 1.1 \times 0.1 = 0.11$$

Pero como el factor reductor es aquí $(1 - 0.1) = 0.9$ la nueva ecuación es:

$$X_{t+1} = 0.11 \times 0.9 = 0.099$$

O sea que el factor reductor afectó muy poco el resultado.

Cuando X_t crece mucho, por ejemplo a 0.8 del máximo, este factor pasa a ser 0.2, y se tiene entonces en lugar de:

$$X_{t+1} = 1.1 \times 0.8 = 0.88$$

El resultado corregido por el factor reductor de 0.2:

$$X_{t+1} = 1.1 \times 0.8 \times 0.2 = 0.176$$

Éste disminuye la población a la quinta parte.

Tenemos entonces una expresión matemática que permite calcular sin ambigüedad el valor de X_t; en otras palabras estamos tratando con sistemas dinámicos donde el futuro depende de manera determinista del pasado, sin incertidumbres.

Toda la información sobre el sistema se halla contenida en la ecuación logística, y aplicando ésta podemos conocer cómo variará en el tiempo. Así, si X_0 es el valor inicial de la variable cuya evolución en el tiempo queremos conocer, será X_1 al llegar al tiempo $t = 1$:

$$X_1 = K \times X_0 \times (1 - X_0) \qquad \text{(a)}$$

Y para X_2 tendremos:

$$X_2 = K \times X_1 \times (1 - X_1) \qquad \text{(b)}$$

Donde puedo sustituir X_1 por la ecuación (a), resultando así:

$$X_2 = K(K \times X_0(1 - X_0)(1 - K \times X_0(1 - X_0)))$$

Y similarmente para $t = 3$:

$$X_3 = K(K(KX_0(1 - X_0)(1 - KX_0(1 - X_0))) \times (1 - K(KX_0(1 - X_0)(1 - KX_0(1 - X_0)))))$$

Como se ve, la ecuación se convierte progresiva y rápidamente en una fórmula cada vez más complicada; si pretendiésemos conocer el futuro para $t = 20$ (20 años, o 20 generaciones, o lo que sea que usemos como medida del tiempo), necesitaríamos unas 300 páginas nada más que para plantear X_{20}, y para llegar a un tiempo $t = 50$, que no es algo exageradamente lejos en el futuro, no alcanzaría con el tamaño de una biblioteca.

En la era de las computadoras, no tiene sentido seguir este camino; ya que si hay algo que esos artefactos saben hacer, es reiterar con gran velocidad la misma operación todas las ve-

ces que se desee, y además lo hacen sin equivocarse ni aburrirse.

De modo que, en lugar de seguir el método clásico de escribir una ecuación que sea válida para todos los t, X_0 y K posibles, para luego introducir en ella los números correspondientes al caso que interese, lo que haremos es darle a la computadora los datos iniciales X_0 y K, la cantidad de iteraciones que necesitamos, y las instrucciones para que ejecute el cálculo básico que como habíamos visto es muy elemental, consistiendo en hacer una sustracción y dos multiplicaciones.

Con el programa así preparado cualquier computadora personal nos permite obtener valores tales como $X_{100\,000}$ o cualquier otro en muy poco tiempo, y además hacer experiencias tales como ver paso a paso cómo va variando X_t al incrementar t, y qué pasa cuando cambia K.

Quien desee experimentar el poder del cálculo iterativo puede hacerlo sin necesidad de utilizar una computadora: basta con una simple calculadora de bolsillo y una buena dosis de paciencia.

Si dispone de ambas, propongo hacer un cálculo iterativo muy simple, que consiste en elevar un número al cuadrado, el resultado volver a elevarlo al cuadrado, y así sucesivamente hasta diez veces en total.

Introduzcamos el número "0.9999" en la calculadora, y pulsemos la tecla "x^2", o si no se dispone de ésta, la de multiplicar, "×", seguida de "=". Repitamos la misma operación diez veces. Una calculadora de ocho dígitos da como resultado:

$$X_0 = 0.9999$$
$$X_{10} = 0.9026637$$

Veamos ahora qué ocurre cuando se varía ligeramente la condición inicial. ¿Qué pasará si utilizamos como X_0 un valor que difiere en sólo 0.1% del anterior? Para:

$$X_0 = 0.9999$$

Es ahora:

$$X_{10} = 0.3589714$$

¡De modo que el resultado final es 40% del anterior, habiendo cambiado el valor inicial en sólo 0.1%!

Tenemos aquí un ejemplo de la sensibilidad a las condiciones iniciales, que, como habíamos visto, es una condición necesaria para que aparezcan los fenómenos caóticos y de complejidad en los sistemas dinámicos.

Historias de peces y crustáceos

En estas operaciones matemáticas iterativas aparecen otras características inesperadas, que se ponen de manifiesto a partir de algunas decenas de ciclos de cálculo, y que pasaremos a describir. Si alguien desea hacerlo por sí mismo, es preferible que utilice una computadora, a menos que le divierta hacer largas cuentas con una calculadora.

El programa con instrucciones para la computadora tiene esta forma general en lenguaje Basic:

```
INPUT K
X = 0.6
FOR n = 1 to 100
X = K * X * (1 - X)
PRINT X
NEXT n
STOP
```

Donde *K* es la tasa de incremento, y hemos fijado el número de iteraciones *n* en 100 y el *X* inicial en 0.6.

Para demostrar el asombroso comportamiento de la ecuación logística, comenzaremos comparándola con los resultados de los estudios matemáticos que hizo Vito Volterra en la década de 1920 para explicar las fluctuaciones periódicas de la población de peces del Mediterráneo.

Consideremos una población de crustáceos, y de peces que se alimentan de aquéllos, y vamos a suponer que los crustáceos tienen una tasa de reproducción pequeña, $K = 1.01$, y que su población inicial es $X_0 = 0.6$.

Haciendo el cálculo resulta que la población disminuye cada año de modo que, al cabo de un tiempo, la colonia desaparecerá:

t	X	t	X
0	0.6000	5	0.1147
1	0.2424	10	0.0732

¿Pero qué pasa cuando K es mayor, por ejemplo $K = 2$?

t	X	t	X
0	0.6000	3	0.5000
1	0.4800	4	0.5000
2	0.4992	5	0.5000

La población queda estabilizada en 0.5.

Si la tasa de reproducción aumenta a 2.7, la ecuación muestra una fluctuación anual, variando entre 0.61 y 0.64 por la oposición entre el crecimiento y la acción de los peces, pero finalmente, al cabo de unos 15 ciclos, se estabiliza en aproximadamente $X = 0.63$, valor que hace, por lo tanto, de atractor para este comportamiento.

Pero es a partir de una tasa de reproducción K mayor que 3.0 que sucede algo nuevo: el sistema fluctúa fuertemente al principio, y finalmente la población de la colonia oscila entre dos valores estables, de modo que el atractor se ha bifurcado en dos.

Así, para $K = 3.3$:

t	X	t	X
0	0.60000	14	0.47941
1	0.79200	15	0.82360
2	0.54363	97	0.47943
3	0.81872	98	0.82360
4	0.48978	99	0.47943
5	0.82466	100	0.82360

Los valores estables son aquí 0.47943 y 0.82360, y cada uno de ellos se repite cada dos años.

Al representar en un gráfico la variación anual de la población de crustáceos (véase la figura IX.1), vemos que una vez que las fluctuaciones se han estabilizado, si en un año aumentan a 0.83360, esto resulta ser un verdadero festín para los peces, que, a su vez, se incrementan tanto que bajan la cantidad de crustáceos al nivel inferior de 0.47943 en la temporada siguiente. Esto disminuirá la población de peces por la escasez de alimento, permitiendo que al año siguiente vuelvan a abundar los crustáceos, y así cíclicamente.

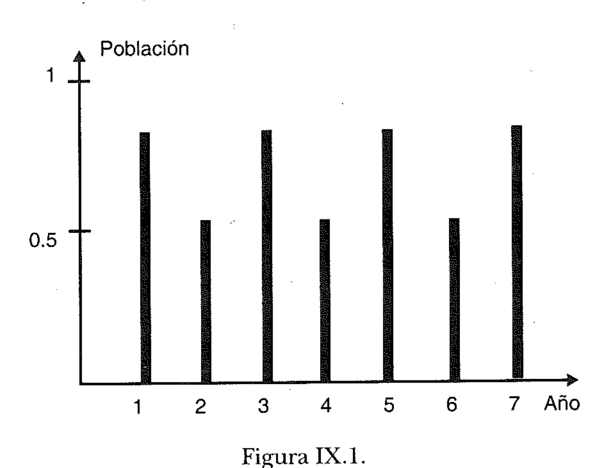


Figura IX.1.

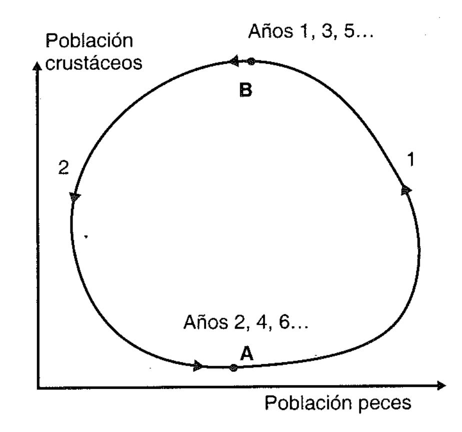


Figura IX.2.

El proceso descrito se puede representar también como fue planteado por Volterra, en un espacio de las fases, lo que permite visualizar el comportamiento cíclico del sistema peces-crustáceos en la figura IX.2, donde el eje vertical nos indica la población de crustáceos y el horizontal la de peces.

Si iniciamos la colonia en A con $X_0 = 0.6$ crustá-

ceos irán incrementándose a lo largo de la curva 1, que marca simultáneamente el aumento de los predadores hasta llegar al nivel *B*. *A* partir de allí la población de peces predomina, llevando al sistema por la curva 2 con disminución de crustáceos, que arrastra hacia un mínimo a la población de peces, y esto se repite cíclicamente con un periodo, en este caso de dos temporadas.

La ecuación logística se ajusta muy bien a otros ciclos naturales como los de insectos y bacterias, que son los estudiados por R. May en la década de 1970.

Continuemos explorando la ecuación mediante la computadora, que cumple en esta época de fines del siglo XX un papel fundamental como herramienta de la ciencia, análogo al del microscopio y del telescopio en siglos anteriores.

Si aumentamos K por encima de 3.45, los dos valores que se repetían cada dos años vuelven a hacerse inestables, y cada uno se bifurca para producir una población que oscila alrededor de cuatro valores diferentes que se repiten cada cuatro años, de modo que el periodo se ha duplicado.

Para $K = 3.45$:

t	X	t	X
0	0.6	76	0.42713
72	0.42688	97	0.84470
73	0.84405	98	0.45258
74	0.45412	99	0.85474
75	0.85524	100	0.42835

Los niveles estables se hallan alrededor de 0.42820, 0.45290, 0.84410 y 0.85320.

En $K = 3.56$ se produce una nueva inestabilidad, con bifurcaciones que producen ocho valores fijos, con periodos del doble de los anteriores, y esto vuelve a ocurrir en $K = 3.596$, dando 16 valores; luego siguen apareciendo mas y más bifurcaciones, hasta que finalmente en $K = 3.56999$ se llega a un estado caótico, con infinitos valores de X para la colonia que oscilan en forma imprevisible entre 1 y 0.

Vemos en este ejemplo que un sistema dinámico puede partir de un estado ordenado y bajo ciertas condiciones evolucionar hacia un estado caótico.

En realidad existen varias rutas entre el comportamiento regular, ordenado, y el estado caótico, impredecible, por las que pueden transitar los sistemas dinámicos; además en algunas etapas de las rutas aparecen comportamientos complejos que pueden darles propiedades sorprendentes.

Dichas rutas se pueden transitar en ambos sentidos: sistemas dinámicos ordenados pueden pasar a un comportamiento altamente complejo o llegar hasta uno caótico, como ocurre con los péndulos y otros osciladores, o pasar del caos a una complejidad organizada, como en los relojes químicos o las células de Benard.

Hemos visto que para que aparezcan estos comportamientos en los sistemas con una cantidad de componentes que puede ser pequeña o muy grande, es requisito indispensable que el número de variables que intervienen en la dinámica del sistema sea limitado. Si el número de variables independientes, o grados de libertad, es menor de tres, los comportamientos analizados no aparecen; por otra parte, si dicho número es muy grande, será imposible distinguir con estos métodos si su evolución se debe a los fenómenos que estamos estudiando o si obedece a factores fundamentalmente aleatorios.

Las rutas entre orden y caos se pueden clasificar en tres tipos principales de acuerdo con las diferentes modalidades con las que se producen dichas transiciones:

1) Casi periodicidad. El sistema se representa en el espacio de las fases con un atractor casi periódico inscrito en un toro y la transición lo transforma en un atractor extraño.

2) Cascadas subarmónicas. El sistema presenta oscilaciones de un cierto periodo T, y a partir de la transición se produce una bifurcación, apareciendo otras de periodo doble $2T$, en la transición siguiente se agregan oscilaciones de periodo $4T$, luego $8T$ y así sucesivamente en cascada. Esto se observa entre otros en los fenómenos de convección térmica (capítulo VI) y en la reacción BZ (capítulo VII).

3) Intermitencias. El sistema produce esporádicamente fluc-

tuaciones de gran amplitud. Estas transiciones suelen aparecer en los procesos hidrodinámicos y también en las oscilaciones de circuitos electrónicos, donde se manifiestan como un ruido de baja frecuencia que aparece ocasionalmente.

Con base en la clasificación precedente, en el caso de la ecuación logística, la variación del parámetro *K* implica una ruta al caos por duplicación de periodos, es decir, la cascada subarmónica.

Como vemos, el papel de *K* es definir la complejidad del comportamiento, y resulta conveniente visualizar su efecto sobre la evolución del sistema mediante un gráfico como el de la figura IX.3 de la página siguiente, donde representaremos en el eje vertical la población y en el horizontal el valor de *K*.

Donde aparece el caos

La figura muestra el panorama que encontró R. May con su modelo basado en la ecuación logística, donde iba variando el *K* por variación del suministro de alimento. La figura representa la población en el eje vertical y el parámetro *K* en el eje horizontal.

Halló así las bifurcaciones sucesivas que indican el aumento de las oscilaciones en la población de insectos, y que luego,

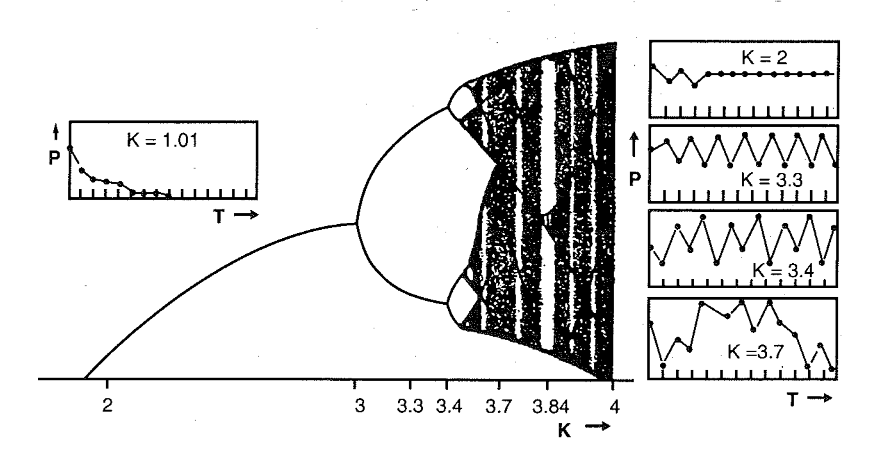


Figura IX.3.

después de varias bifurcaciones, se entraba en la zona caótica que indica la figura, donde la población en el modelo fluctúa erráticamente, tal como ocurre en la realidad con la de los insectos.

Hemos representado en los recuadros de la figura IX.3 algunas de estas situaciones, que responden a un valor específico de K. Así para el de $K = 1.01$, la población P que inicialmente era de 0.6, disminuye con el tiempo T, representado en el eje horizontal, hasta llegar a cero: se extingue.

El recuadro de $K = 2$ nos indica que para este valor, después de algunos ciclos con fluctuaciones la población se hace estable.

Para $K = 3.3$, la población oscila entre los dos valores 0.47943 y 0.82360, tomando uno de estos valores en un ciclo, y el otro en el ciclo siguiente. Estos dos valores están además representados en el gráfico principal: si en $K = 3.3$ trazamos una línea vertical, ésta cortará a las dos ramas de la curva bifurcada, en los valores mencionados de P.

Del mismo modo, para $K = 3.4$ se tienen cuatro valores que se repiten en los ciclos sucesivos, valores que corresponden en la curva principal a las intersecciones de una línea vertical con las cuatro ramas. En $K = 3.7$, hay tantos valores distintos de P, que no es posible hallar relación alguna entre un ciclo y el siguiente; en la curva principal, una línea vertical pasará por miles de intersecciones, marcadas como puntos en las franjas verticales. Se está en la zona de caos determinista. Finalmente, para $K = 4$, se tiene el caos con infinitos valores posibles para cada ciclo.

Hoy en día, una de las preguntas que se plantean los ecólogos es la de averiguar si el comportamiento que predice este modelo se da en las poblaciones reales.

Las opiniones entre los biólogos sobre estas teorías están divididas: desde los que piensan que la imprevisibilidad inherente al caos determinista es un factor muy importante para explicar la evolución de las especies, hasta los que consideran que las poblaciones reales no pueden tener dinámicas caóticas porque se extinguirían, y que las investigaciones en laboratorios y por simulación con computadora se alejan demasiado de los casos que aparecen en la naturaleza.

Ésta no es una tarea sencilla, porque en los sistemas ecológi-

cos resulta muy difícil separar los múltiples factores ambientales, y tampoco se pueden variar parámetros como la tasa de reproducción para ver cómo varía su efecto.

De todos modos se han hecho experiencias sobre poblaciones animales o vegetales aisladas en el laboratorio, donde sí se pueden alterar algunas condiciones, variando, por ejemplo, la temperatura ambiente para acelerar el metabolismo de moscas de la carne o de protozoarios.

Los estudios sobre estas poblaciones experimentales revelaron efectivamente las transiciones que corresponden a las primeras bifurcaciones, pero sin una duplicación de periodos tan clara y nítida como la que aparece en los sistemas físicos.

Lo que aparece inequívocamente es la transición al caos.

El otro método poderoso que se está utilizando para el estudio de la dinámica de poblaciones es la simulación por computadora, en la que los investigadores crean un modelo que genera series de datos que representan el tamaño de una población, a lo largo de muchas generaciones. Éste es un mundo imaginario, donde el investigador especifica a voluntad los factores que gobiernan al sistema, y luego los analiza usando los métodos que se aplican a los sistemas vivientes reales.

Este método matemático permite construir un espacio de las fases con tantas dimensiones como variables independientes están en juego, y buscar atractores extraños, que, si aparecen, son una evidencia de que se está ante un sistema dinámico no lineal, determinista.

Una de las dificultades que se presentan es que cada especie usualmente interactúa con muchas otras, y para cada una debe agregarse una variable o dimensión, de modo que hay que trabajar con espacios de las fases multidimensionales, donde es muy fácil confundir fluctuaciones estadísticas con la presencia de atractores.

Se ha aplicado el método a casos como los de las epidemias de sarampión en Nueva York aparecidas durante un periodo de 40 años, y éste reveló la presencia de un atractor tridimensional en un espacio de cuatro dimensiones.

Los métodos matemáticos se han aplicado también a la búsqueda de evidencias de caos determinista en la dinámica de organismos individuales, es decir, en los procesos fisiológicos y neurobiológicos rítmicos, lo que permite que se les pueda estudiar como conjuntos de osciladores que se influencian mutuamente y que tienen ciclos de realimentación con una dinámica no lineal.

Un caso muy estudiado es el de los ritmos cardiacos, que podría arrojar luz sobre las arritmias y sobre la interpretación de los electrocardiogramas antes y después de un ataque cardiaco.

El biofísico R. Cohen hizo una simulación por computadora de los ritmos cardiacos y comprobó que en el preludio de un infarto aparece una bifurcación de periodos de latido. Esto se explicaría considerando que los pulsos eléctricos que fuerzan a las fibras musculares de los ventrículos a contraerse y bombear así la sangre, obran como un sistema oscilador con un periodo regular. Si por alguna patología aparece una alteración del periodo de oscilación de los pulsos eléctricos de un grupo de fibras, estas dos oscilaciones diferentes combinadas pueden entrar en la situación que examinamos para dos péndulos acoplados, con una cascada de bifurcaciones de periodo $2T$, $4T$..., hasta paralizar el corazón.

Es claro que aquí se trata de un efecto que aparece en una simulación por computadora y que no es fácil obtener datos experimentales de un infarto, pues médicos y pacientes están bastante ocupados con tratar de superar el trance. De modo que lo más cercano al fenómeno real es hacer mediciones en un laboratorio.

En 1980, el fisiólogo L. Glass inició una serie de experiencias con células del corazón de embriones de pollo. Éstas, en un medio de cultivo, siguen pulsando espontáneamente a un ritmo de 60 a 120 latidos por minuto, y son así un oscilador natural. Si se introduce un microelectrodo en esa masa de células se les puede aplicar choques eléctricos periódicos, de modo que ahora se tiene un sistema oscilatorio con dos ritmos acoplados, uno intrínseco y otro forzado. Este último se puede variar, de modo que se observa cómo varía el latido cardiaco

apareciendo periodos $2T$, luego $4T$, y también situaciones totalmente irregulares, caóticas que sugieren una fibrilación.

Otra aplicación aparece en la neurofisiología, donde se ha analizado la complejidad dinámica de los electroencefalogramas (EEG) que registran la actividad cerebral de seres humanos realizando diversas tareas como, por ejemplo, contar desde 700 hacia atrás de 7 en 7. Se computó la dimensión fractal del atractor que aparece al representar en el espacio de las fases el conjunto de las oscilaciones registradas por los EEG, hallando que pasa del valor básico de 2.3 a un valor de alrededor de 2.9 cuando el sujeto está haciendo el esfuerzo de contar hacia atrás. La conclusión a que se llegó es que las formas de EEG de mayor dimensión fractal, o sea más complejas, corresponden a un estado mental más alerta.

Pero todos estos estudios fisiológicos y neurológicos presentan el mismo flanco débil que el de las poblaciones animales: lo difícil que resulta aplicar estas teorías a los casos reales que aparecen en la naturaleza, y que son muchísimo más complejos que los modelos que se pueden plantear con una computadora.

Las dificultades para la aplicación de estos métodos de estudio son reconocidas por R. May, quien, sin embargo, lo promueve desde hace veinte años basándose en el hecho de que tanto las poblaciones como los procesos biológicos están gobernados por mecanismos no lineales, y que, por lo tanto, debieran presentar comportamientos caóticos además de los cíclicos estables.

Parece todavía muy prematuro pronunciarse sobre el resultado final. Evidentemente es necesario seguir perfeccionando las técnicas de aplicación de un método que, al fin y al cabo, es muy reciente, antes de poder determinar hasta dónde estas teorías sobre las transiciones entre orden y caos constituyen la explicación de la dinámica de los seres vivientes.

Ciclos económicos

También en el campo de las ciencias sociales se está trabajando intensamente en la aplicación de estos novedosos conceptos.

En particular resulta atractivo para los economistas intentar aumentar su capacidad de predicción de los mercados financieros. Al fin y al cabo, los mercados financieros y las economías de las naciones son sistemas dinámicos con mecanismos de realimentación y de autorregulación. Sabemos que si se eleva el precio de un producto de manera excesiva, la demanda disminuye y el precio deberá caer. De modo que también aquí se puede intentar hacer un modelo basado en la ecuación logística:

$$P_{t+1} = A \times P_t(1 - P_t)$$

Donde llamaremos P_t a un precio en el día, mes o momento t, A a la tasa de aumento, y P_{t+1} al precio en el tiempo siguiente.

Como hemos visto anteriormente, las propiedades de esta ecuación matemática nos indican que para A menor que 3, después de cierto tiempo el precio P será estable, y que si A es mayor que 3, se tendrán fluctuaciones periódicas en el precio, con ciclos dobles que oscilan entre dos valores al principio, para pasar luego a cuatro, y así sucesivamente hasta que para A aún mayores, el valor de P puede tener comportamientos inusuales, tales como no repetirse nunca, es decir ser caóticos. En tal situación, un gráfico de los valores de P puede ser fácilmente confundido con una serie de números generados al azar.

En los últimos años varios grupos de investigación encararon este problema de aplicar el enfoque que utiliza la física de los sistemas dinámicos no lineales al campo de la economía.

El más conocido es el que se nucleó en el Santa Fe Institute, en Nuevo México, donde en 1987, tres ganadores del premio Nobel (el economista Kenneth Arrow y los físicos Murray Gell-Mann y Philip Anderson) reunieron a economistas, físicos, biólogos y especialistas en computación para empezar un programa de investigación sobre la economía considerada como un sistema dinámico complejo.

Ellos han logrado construir modelos de computadora de la economía en los que los inversores son, a su vez, programas de computadora capaces de reconocer pautas de variación en los precios y de actuar en consecuencia, y que además aprenden con la experiencia. El resultado de esta simulación por computadora comienza a acercarse a lo que se observa en las economías reales.

Pero al igual que lo que vimos para las aplicaciones de una ecuación del mismo tipo a los sistemas ecológicos y a los organismos vivos, la realidad económica es muchísimo más compleja, afectada por los constantes cambios en la sociedad, y el precio de cada producto está vinculado al de muchos otros.

Así, es posible que los efectos de caos determinista que aparecen en estos modelos matemáticos no estén presentes en una economía real, y que sea igualmente válido seguir describiendo la economía mediante procesos lineales con datos que tienen un importante componente de "ruido", o sea de fluctuaciones al azar.

Para decidir qué enfoque es el más adecuado, hay que utilizar los casos reales, que son muy difíciles de aplicar porque se requieren larguísimos conjuntos de datos, y aquéllos con los que se cuenta en general son escasos, además de tener un fuerte componente de ruido.

Pero en los últimos años se han inventado nuevas técnicas de análisis estadístico que son capaces de distinguir entre las fluctuaciones debidas al azar y las que pueden exhibir una regularidad si se les examina adecuadamente.

La idea básica es que los sistemas complejos pueden revelar su estructura si se traducen los datos a un espacio de las fases con un número apropiado de dimensiones.

Estos métodos se han aplicado con resultados alentadores a los estudios sobre poblaciones y otros sistemas biológicos, sobre fluidos turbulentos, y ahora también para estos modelos económicos. Entre los más poderosos figura el de los algoritmos que utilizan una sola magnitud (población, temperatura, precio, o lo que sea que nos brinde una serie suficientemente larga de datos) tomada a intervalos de tiempo regulares.

En su forma más elemental, esta serie temporal es una lista de cifras que representan los datos experimentales, por ejemplo, una población de bacterias medida cada hora:

0.453; 0.671; 0.632; 0.661; 0.702; 0.799; 0.530; 0.501, ...

Deseamos comprobar si aparece un atractor en un espacio de las fases que tenga como mínimo tres dimensiones. Por todo lo que hemos visto hasta aquí, se requiere entonces representar las mediciones de tres variables independientes, pero los

datos que disponemos sólo nos dan información sobre una variable. ¿Hay solución para esta situación?

Los matemáticos D. Ruelle y N. Packard hallaron un truco que resuelve el problema, y F. Takens logró demostrar que este artificio es matemáticamente correcto.

El método consiste en fabricar otras dos series con los mismos valores de la medición, pero desplazados en el tiempo. Llamando X_1, X_2, X_3,... a los sucesivos valores obtenidos, se construyen las seudoseries:

$$Y_1 = X_2,\ \ Y_2 = X_3,\ \ Y_3 = X_4,\ldots$$
$$Z_1 = X_3,\ \ Z_2 = X_4,\ \ Z_3 = X_5,\ldots$$

O sea que, en lugar de una sola serie temporal, se tienen la original X y dos copias desplazadas uno y dos lugares en el tiempo, Y y Z:

X = 0.453, 0.671, 0.632, 0.661, 0.702, 0.799, 0.530, 0.501,...

Y = 0.671, 0.632, 0.661, 0.702, 0.799, 0.530, 0.501, ...

Z = 0.632, 0.661, 0.702, 0.799, 0.530, 0.501, ...

De modo que para el tiempo $t = 1$ se representa en un espacio de las fases tridimensional el punto $X = 0.453$, $Y = 0.671$, $Z = 0.632$; para $t = 2$, el punto $X = 0.671$, $Y = 0.632$, $Z = 0.661$, y así sucesivamente.

Si el resultado es que los puntos quedan agrupados en una región limitada formando un atractor, esto es indicio de que hay una regularidad, algún comportamiento periódico. Si, en cambio, quedan esparcidos más o menos uniformemente por todo el espacio de las fases, puede tratarse de un fenómeno aleatorio, o puede ser que se requiera un espacio de más dimensiones donde sí aparezca un atractor.

Es claro que cuanto más elevado sea el número de dimensiones necesario, tanto más dudosa resulta la presencia de un atractor.

Una de las dificultades en la aplicación de estos métodos radica en que, incluso para sistemas dinámicos como los flui-

dos turbulentos no es fácil discernir cuáles son las variables pertinentes. Esto vale todavía más para los sistemas que se estudian en campos alejados de la física, donde es aún más difícil determinar la dimensión del espacio de las fases.

X. Orden, caos y complejidad en las matemáticas

HEMOS visto algunas de las sorprendentes cualidades de la ecuación logística descubiertas cuando R. May la aplicó al campo de la biología y que causaron que muchos matemáticos comenzaran a estudiarla en detalle haciendo largos cálculos con sus computadoras. Se trata de un nuevo modo de investigar las leyes de las matemáticas que difiere de los planteos donde todo el conocimiento se alcanza mediante pasos lógicos dentro de un marco abstracto y no mediante experimentos. Gracias a las computadoras se hace hoy experimentación matemática y esto es particularmente así en la que se aplica a la dinámica por el papel que desempeñan en ella los procesos iterativos.

LA ECUACIÓN LOGÍSTICA REVELA UN MUNDO MUY COMPLEJO

Una ecuación simple como la logística revela aspectos insospechados hasta que se hacen varios millones de cálculos que indican una relación muy íntima entre la dinámica de sistemas complejos y la estructura del sistema de números. Desde el momento en que las iteraciones para este tipo de ecuaciones revelan una sensibilidad a los valores iniciales se comprueba que no sólo los sistemas del mundo físico pueden ser a la vez deterministas e impredecibles sino que también es así en estos sistemas del mundo matemático.

Solamente se podría eliminar esa imposibilidad de predecir un resultado a largo plazo si se midiese con infinita precisión en el mundo físico o si en el mundo matemático se calculase

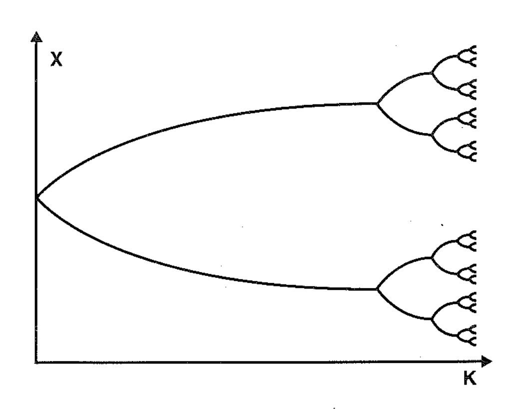


FIGURA X.1.

utilizando todos los infinitos dígitos de los que están formados la mayoría de los números.

Examinemos ahora los asombrosos resultados que provienen de hacer cálculos con la ecuación logística para un *K* mayor que 3.5 donde aparece el comportamiento complejo (véase la figura X.1). Vemos que el periodo *T* se bifurca en cascada cada vez más rápido al aumentar *K*, y que la distancia entre los valores correspondientes de *X* se va haciendo cada vez menor. En una zona a partir de *K* = 3.57 se tiene para cada valor creciente de *K* sucesivamente 1 024, 2 048, 4 096,... periodos, y haría falta un microscopio para distinguir la estructura formada por los puntos.

Otra propiedad notable es la de "renormalización", descubierta por M. Feigenbaum en la década de 1970: para bifurcaciones suficientemente altas, por ejemplo con 2 048 periodos, si éstos se vuelven a bifurcar a 4 096 repiten la estructura de los 2 048, siempre y cuando se representen con un aumento muy preciso en las escalas; el aumento en *K* debe ser 4.66920166... y el aumento en *X* debe ser 2.502908... Estos números de Feigenbaum son universales, como π, porque la misma estructura de bifurcaciones en cascada y los mismos números de Feigenbaum aparecen también en otras ecuaciones siempre y cuando sean funciones continuas de *X* y con un solo máximo.

Las bifurcaciones en cascada y los números de Feigenbaum aparecen no sólo en los cálculos que hacen los matemáticos con

sus computadoras, sino también cuando se representan matemáticamente muchos comportamientos de la naturaleza.

Representemos en una gráfica más detallada la variación de X en función de K (véase la figura X.2). Veremos que más allá de las bifurcaciones, para K entre 3.55 y 4 aparecen franjas verticales cubiertas de puntos que corresponden a los infinitos lugares donde podría estar el sistema para un valor de K, de modo que si la computadora arroja un valor correspondiente a un punto $X = 0.57739$, por ejemplo, el siguiente estará en algún lugar entre los extremos superior e inferior de la franja oscura, y esto es todo lo que podemos anticipar hasta que la computadora nos revele el resultado del nuevo cálculo.

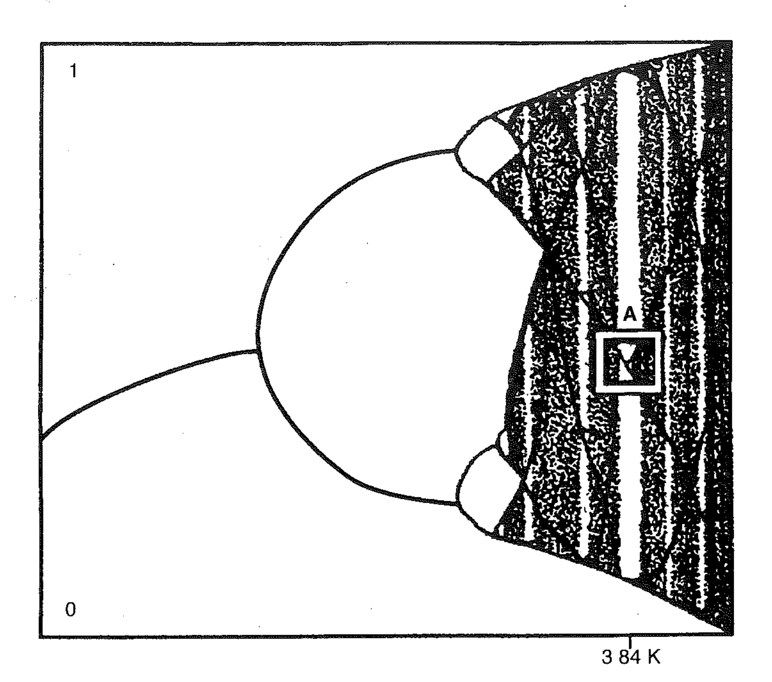
Más allá de $K = 4$ los resultados no muestran estructura alguna entre $X = 0$ y $X = 1$. De modo que los puntos son, en esta zona, indistinguibles de los que se hubieran podido marcar por azar arrojando dados, a pesar de que estamos utilizando una ecuación matemática perfectamente determinista.

No podemos atribuir esta imposibilidad de predecir a la existencia de factores desconocidos, porque la ecuación no tiene ninguna ambigüedad. El motivo es que como hemos visto, no podemos medir ni representar un estado presente con precisión infinita, y si bien esta limitación no es importante en muchas situaciones, ahora percibimos que abundan los comportamientos no lineales, donde causas insignificantes que pensábamos no afectarían a un sistema dinámico, producen efectos tan desproporcionadamente grandes que cambian su comportamiento de manera imprevisible.

Podemos considerar que la región desde $K = 3.55$ y $K = 4$ corresponde a la complejidad y, a partir de $K = 4$, al caos con puntos que llenan todo el espacio.

Ventanas que son como islas en un mar caótico

En la zona de complejidad se pueden observar curvas más oscuras, que evidencian una mayor concentración de puntos, o sea, mayor probabilidad de encontrar el sistema, y además algo especialmente significativo: obsérvese que hay bandas verticales blancas intercaladas, cruzadas por unas pocas líneas. Éstas reciben el nombre de ventanas, e indican el regreso a un



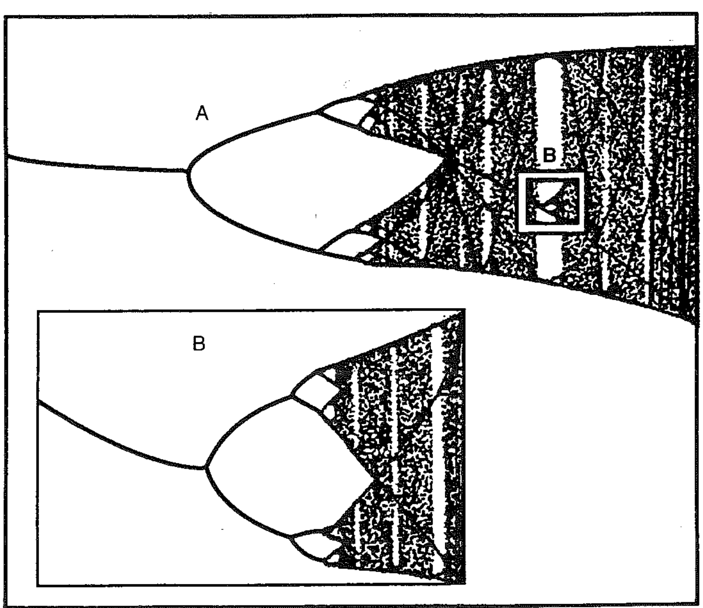


FIGURA X.2.

comportamiento cíclico regular, donde aparecen dos o tres periodos diferentes. Tales intervalos con pocas frecuencias de oscilación son llamados de intermitencia.

Si se examina una ventana de tres periodos como la de K = 3.83 con mejor definición, es decir, con más cálculos de computadora y se representa la zona central que hemos encerrado en el recuadro A de la figura X.2, en una escala amplificada, nos encontramos con otra gran sorpresa: el periodo vuelve a bifurcarse, y así inicia una cascada con duplicaciones sucesivas de 6, 12, 24, 48,... repitiendo en miniatura el esquema original, con ventanas que a su vez vuelven a mostrar bifurcaciones en cascada (recuadro B), en las que hay otras ventanas con sus propias cascadas y así tantas veces como se desee continuar explorando este universo desconocido.

Se tiene así el mismo fenómeno de autosemejanza que habíamos encontrado en las figuras fractales.

CONJUNTOS DE MANDELBROT Y PLANOS COMPLEJOS

Volvemos entonces al concepto de la generación de los fractales mediante el proceso de iteración. Cuando el matemático B. Mandelbrot revisó los trabajos de Gaston Julia, un discípulo de H. Poincaré, sobre cálculos iterativos con números complejos, decidió que éstos indicaban un camino para construir las figuras fractales a partir de ecuaciones matemáticas.

Es necesario aquí pasar revista al concepto de número complejo. Como sabemos hay varias clases de números, llamándose números naturales a los mas básicos y elementales: 0, 1, 2, 3... Éstos se pueden sumar o multiplicar para producir otros números naturales. Pero si se quiere restar con un método sistemático, es conveniente introducir los números negativos –1, –2, –3,...

Hasta aquí disponemos sólo de números enteros, y esto puede crear problemas cuando tratamos de dividir un entero por otro, de modo que necesitaremos las fracciones o números racionales 1/2, –1/2, 1/3, –1/3, 3/2, –3/2,... y los números irracionales, que requieren infinitos dígitos para ser expresados, como π, y $\sqrt{2}$.

Todos estos diversos tipos de números forman el sistema de

números reales. Pero queda aún una limitación: si se desea obtener la raíz cuadrada de un número, sólo se puede hacer con los que son positivos; así, la raíz de 9 es 3, que multiplicado por sí mismo regenera el 9, pero la raíz de –9 no existe, ya que -3×-3 también da 9. Las raíces cuadradas de números negativos se denominaron, en consecuencia, números "imaginarios" para diferenciarlos de los "reales", pero como resulta sumamente conveniente utilizarlos para los cálculos, se resolvió la dificultad "inventando" una raíz cuadrada llamada i para el número negativo -1. Resulta entonces $i^2 = -1$ y no nos preocuparemos por la naturaleza matemática de i. Como cualquier número negativo, $-a$ se puede escribir como $-1 \times a$, su raíz cuadrada, $\sqrt{-a}$ se puede escribir como $\sqrt{-1} \times \sqrt{-a}$, o sea $i\sqrt{a}$. Con este subterfugio se puede considerar así a estos números tan reales como los "reales", lográndose una mayor versatilidad para el sistema numérico.

Finalmente, si combinamos números "reales" con "imaginarios" resulta un número que llamaremos complejo, no porque sea complicado, sino porque tiene varios componentes. Un número complejo es de la forma:

$$Z = X + iY$$

Donde X e Y son números ordinarios reales, e i es la raíz cuadrada de -1.

Similarmente a los números reales, se puede visualizar los números complejos representándolos mediante un gráfico en un sistema de coordenadas, pero en un plano complejo, donde el eje vertical es iY, y el horizontal es X. El punto Z se ubica en la intersección de las líneas paralelas a los dos ejes que parten del valor de X y del de iY (figura X.3).

Los números complejos tienen su propia aritmética, álgebra y análisis, y al graficar el resultado de hacer operaciones matemáticas con ellos, se descubren aspectos de gran importancia y extraña belleza.

Mandelbrot partió de una operación iterativa muy simple: asignar un valor inicial a la variable compleja Z, elevarla al cuadrado y sumarle un número constante que llamaremos C:

$$Z = Z^2 + C$$

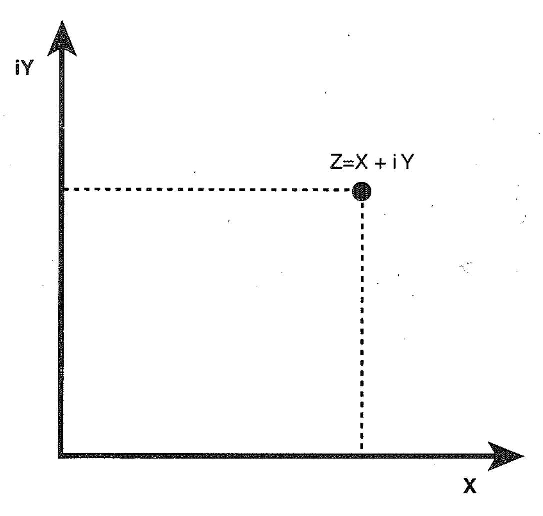


FIGURA X.3.

El *Z* así obtenido se vuelve a elevar al cuadrado y se le suma el mismo *C*, y así sucesivamente, operación que requiere de una computadora para descubrir sus propiedades, pues éstas se ponen de relieve cuando aparece en la pantalla el resultado graficado en el plano complejo (figura X.4). La figura en for-

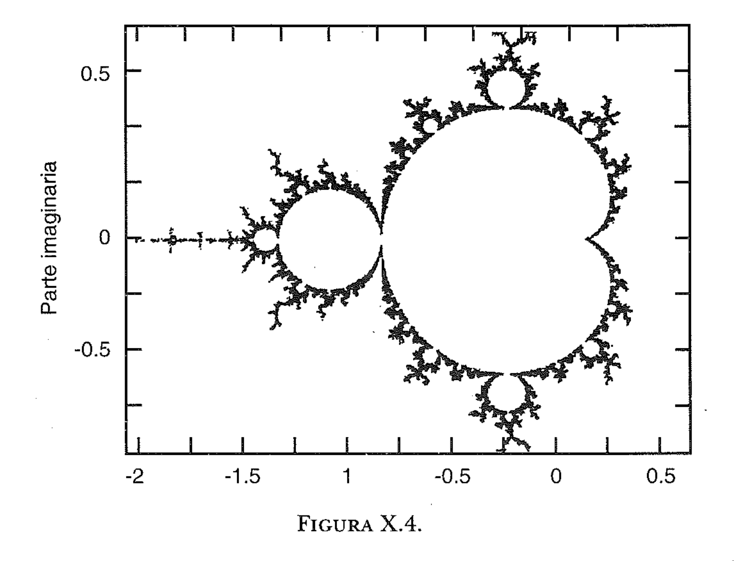


FIGURA X.4.

ma de corazón, llamada "conjunto de Mandelbrot" representa a todos los valores de *Z* que no llegarían a tener un valor infinito aunque se hicieran infinitas iteraciones. Rodeando la figura están todos los puntos que sí tienden a un valor infinito a medida que se van haciendo cada vez más iteraciones.

La frontera entre ambas zonas tiene propiedades de autosemejanza y una complejidad tan grande que sólo se puede captar cuando se instruye a la computadora para que las sombree en distintos tonos de gris, o mejor aún en distintos colores, según las distintas velocidades con que va creciendo Z al iterar.

Hay un libro clásico para admirar estas figuras, *The Beauty of Fractals,* de H. Peitgen y P. Richter, y programas de computadora como el Fractint, que han divulgado la belleza de dichas formas, en las que cada conjunto de Mandelbrot tiene adosadas figuras similares más pequeñas que observadas con la amplificación de la computadora como si fuera un microscopio se repiten y repiten en forma autosemejante.

Si se sigue aumentando la amplificación, aparecen otras formas características, que parecen dendritas, torbellinos, colas de caballos de mar, que a su vez se repiten en detalles cada vez más microscópicos, proceso que no tiene fin, ya que se podría iterar infinitas veces y, además, variando la constante *C* se puede tener una variedad infinita de formas (véase la figura X.5).

Aun el observador más experimentado no deja de admirarse ante este proceso, mediante el cual partiendo de una ecuación simple se llega por iteración a un resultado con estructuras tan extraordinariamente complejas, lo que recuerda al resultado de iterar la ecuación logística. En realidad hay algunos aspectos semejantes entre ambas expresiones matemáticas, que llevan a considerar que la ecuación de Mandelbrot es la versión en variables complejas de la ecuación logística, donde ahora, en lugar de la variable *X* se aplica la *Z,* y en lugar del factor de crecimiento *K* la constante *C.*

Así como representando gráficamente la variación de *X* al aumentar *K* se obtuvieron las sorprendentes formas de la figura X.2, la representación de *Z* al ir variando *C* produce estas figuras de Mandelbrot. En ambos casos se tiene una región "ordenada" con valores estables, que es la región para *K* menor que 3 en la ecuación logística, correspondiente al interior del conjunto de Mandelbrot. La zona de "caos", para *K* mayor que

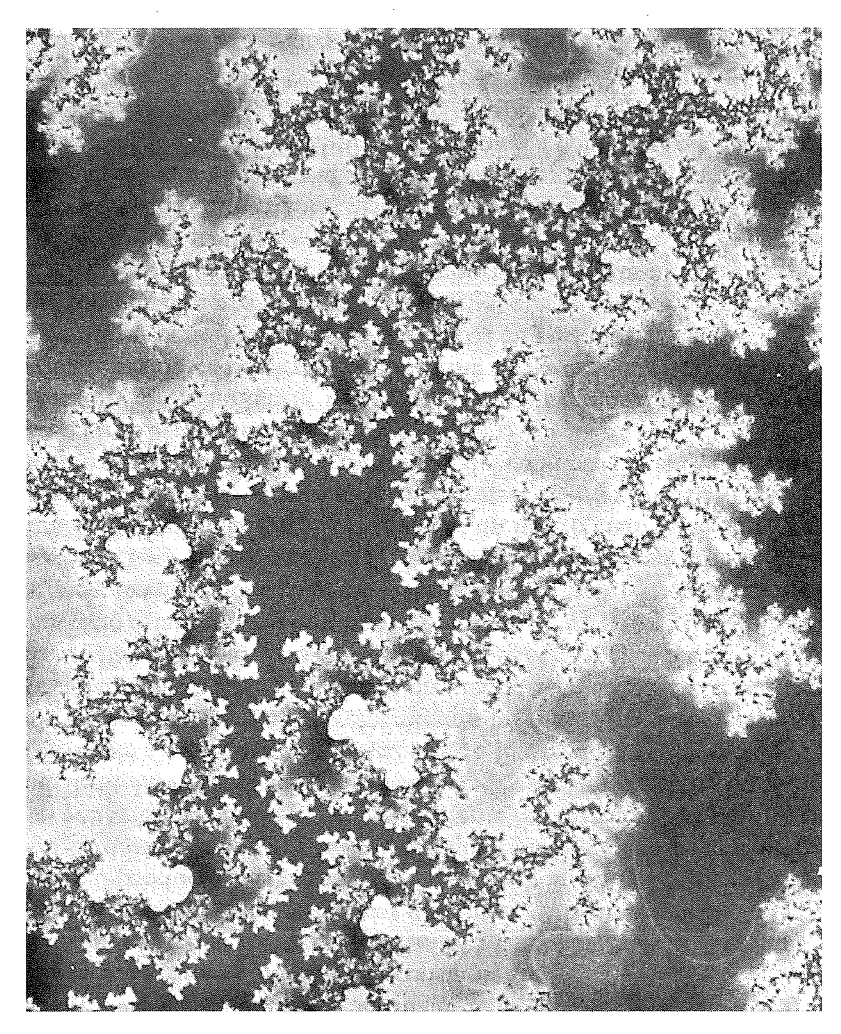


FIGURA X.5.

4 en el primer caso se puede comparar a la región más alejada de la figura de corazón del segundo, donde los valores de Z se van velozmente a infinito, y una región intermedia de una complejísima estructura, con propiedades de autosemejanza.

Como hay ventanas para la ecuación logística, por ejemplo para $K = 3.84$, con un ciclo estable en el que aparecen réplicas en miniatura de la figura original, también el conjunto de Mandelbrot muestra para la posición con parte imaginaria $iY = 0$, y parte real $X = -1.75$, una pequeña isla en forma de corazón (figura X.4), que, vista en detalle resulta ser un nuevo continente semejante al conjunto de Mandelbrot principal con "brotes" que, examinados con el microscopio resultan ser réplicas diminutas del conjunto inicial, y que a su vez exhiben otros brotes más minúsculos.

La figura de Mandelbrot y cada disco circular adosado corresponden a una órbita periódica particular: la de forma de corazón al periodo 1, el disco más grande al periodo 2, seguido por discos de periodos 8, 16,...

Tal complejidad nos muestra que, al igual que lo que observamos en muchos fenómenos de la naturaleza, el comportamiento complejo puede aparecer aun con leyes simples.

Uno de los más importantes resultados de estas investigaciones matemáticas es que, con base en ellas, está surgiendo un nuevo método para encarar los estudios de los sistemas dinámicos: la dinámica compleja, que no significa complicada, sino basada en los números complejos.

XI. ¿Se puede domesticar el caos?

HACE ya más de un siglo que los matemáticos sentaron las bases para estudiar los sistemas no lineales. Desde hace tres décadas se les aplica para investigar los fenómenos llamados caóticos que aparecen en la naturaleza.

La actitud ante el caos ha sido equivalente a la que se tiene con las enfermedades: se investigan sus causas para evitar que aparezcan, ya que lo que uno desea son procesos predecibles,

comportamientos sin sorpresas, sistemas domesticados perfectamente controlables. El caos implica catástrofes, y se trata de mantenerlo a una distancia prudente.

Pero también esta visión del caos está cambiando en los últimos años, ante la evidencia de que se le puede controlar y hasta lograr que haga cosas útiles.

El caos puede ser útil

En la Primera Conferencia de Caos Experimental realizada en Estados Unidos en octubre de 1991 se presentaron informes que así lo demuestran, y que se refieren a investigaciones encaminadas a estabilizar los ritmos cardiacos, controlar las oscilaciones de los relojes químicos, aumentar la potencia de los rayos láser, sincronizar la salida de circuitos electrónicos.

En todos los casos, los resultados de aplicar el caos y de controlarlo han sido muy alentadores.

Muchas de estas aplicaciones han sido iniciadas por los físicos William L. Ditto, del Instituto de Tecnología de Georgia, y Louis M. Pecora, del U. S. Naval Research Laboratory, quienes ven dos razones fundamentales para que el caos sea de utilidad. En primer lugar, el caos determinista de los sistemas dinámicos es, en realidad, una compleja estructura de muchos estados ordenados, ninguno de los cuales predomina sobre los demás, a diferencia de un sistema ordenado que tiene un único comportamiento.

Los investigadores han demostrado que si se perturba de la manera adecuada al sistema caótico, se le puede estimular para que adopte uno de todos esos comportamientos ordenados. La gran ventaja respecto de los sistemas ordenados clásicos es su flexibilidad superior, debido a que pueden saltar rápidamente de un comportamiento a otros de una amplia colección.

La otra razón es que si bien no se puede predecir su comportamiento, éste está determinado, por lo que si dos sistemas caóticos prácticamente idénticos del tipo adecuado son guiados o movidos por la misma señal caótica, ambos van a tener el mismo comportamiento aunque éste no se pueda predecir de antemano. La sincronización caótica es la mejor demostración de que se trata aquí de caos determinista, ya que si se

tratase de azar puro los comportamientos no tendrían por qué coincidir.

Dos sistemas caóticos aislados no pueden estar sincronizados, porque aunque sean prácticamente idénticos y comiencen a funcionar al mismo tiempo, inmediatamente sus minúsculas diferencias serán amplificadas y los harán diverger cada vez más. Pero si son guiados por una señal caótica única ambos tendrán idéntico comportamiento caótico, con la condición de que sean estables, o sea que si se les perturba un poco, su trayectoria en el espacio de las fases cambie sólo un poco. Si se cumple esta condición, ambos sistemas suprimirán cualquier diferencia entre ellos y actuarán de manera caótica, es decir impredecible, pero sincronizadamente. Esto se está aplicando en sistemas de comunicaciones y procesamiento de señales.

El caos es controlable

Las aplicaciones del control del caos se basan en el método OGY (desarrollado por Ott, Grebogi y Yorke, de la Universidad de Maryland), quienes lograron así que un sistema que presenta toda una colección de oscilaciones periódicas pase a tener sólo una.

El método consiste en obtener en el espacio de las fases la información de una trayectoria cuando pasa por la sección de Poincaré del atractor extraño, y esperar hasta que la trayectoria vuelva a pasar por la sección. Si lo hace en las cercanías de una órbita periódica deseada, en ese preciso momento se perturba al sistema dinámico modificando al parámetro adecuado, hasta lograr que quede en esa órbita.

Lo que se comprobó es que como los sistemas dinámicos caóticos son tan sensibles a las condiciones iniciales, reaccionan muy rápidamente y con gran versatilidad a este control, de modo que su uso puede resultar muy ventajoso.

Esto se ha aplicado al control de fluctuaciones caóticas en la intensidad de sistemas láser, logrando mayor flexibilidad y estabilidad, con una potencia de salida aumentada en un factor 15.

Otra aplicación de importancia es el control del caos en un sistema biológico: utilizando una parte del corazón de un co-

nejo se le provocó una arritmia, y en esa situación se le estimuló con señales eléctricas producidas con el método OGY. Éstas bastaron para restablecer un ritmo cardiaco normal, lo que ha alentado a los investigadores para que busquen el control de la arritmia en corazones humanos y proyecten desarrollar marcapasos y defibriladores basados en este caos controlado.

Conclusiones

HEMOS pasado revista a los múltiples aspectos que presenta el comportamiento de los sistemas dinámicos no lineales y a los diversos métodos que se utilizan para su estudio.

Las aplicaciones de conceptos como la autosemejanza, los fractales, los atractores extraños, han despertado un gran entusiasmo en investigadores de las más diversas disciplinas, a partir de sus notables resultados para los sistemas físicos no lineales.

Se está dando un gran impulso a la mecánica estadística, al estudio de las transiciones de fase, de los vidrios de espín, de la turbulencia, temas que además abren nuevas perspectivas en otros campos científicos.

Podría ser, en efecto, que estos conceptos sean igualmente válidos para otros fenómenos complejos tales como las fluctuaciones en las poblaciones de insectos o animales, en la economía o el comportamiento del cerebro, etcétera. Pero para averiguarlo hay que saber cómo caracterizar el caos del sistema estudiado, y eso resulta tanto más difícil cuanto mayor sea el número de variables independientes en juego. Aun para sistemas físicos como los fluidos turbulentos con muchos grados de libertad no se comprende del todo cuál es el papel del caos determinista en las diversas transiciones entre orden y caos.

Cuando hay pocos grados de libertad en juego, se buscará un atractor extraño, pero esto se hace más difícil cuando se aplica a la búsqueda de atractores para el cerebro o el mercado financiero, lo que exige entonces prudencia, porque las expectativas generadas en este campo han fomentado una espe-

cie de moda, por la que hay casos en los que los mismos trabajos científicos que hace unas décadas se presentaban con resultados obtenidos aplicando las herramientas clásicas se hacen ahora derivándolos de dimensiones fractales, sin que se vea una ventaja conceptual para la interpretación de los fenómenos estudiados.

De todos modos, ésta es una disciplina muy joven, en constante evolución. Las perspectivas son muy buenas, pues se está comprendiendo que, en lugar de evitar la no linealidad y la complejidad, se les puede emplear para disponer de sistemas más flexibles, rápidos y de comportamientos inesperados que presentan una amplia gama de posibilidades.

Pero las implicaciones del caos determinista para el campo del conocimiento se extienden más allá de su utilidad para estudiar los distintos tipos de sistemas dinámicos, y de las nuevas técnicas que se van desplegando a medida que crecen sus aplicaciones. Otro aspecto significativo está referido a la forma en que los cambios de nuestro concepto del mundo están condicionados por nuestras creencias, tema estudiado por Thomas S. Kuhn en *La estructura de las revoluciones científicas.*

Al producirse un cambio de paradigma, los científicos ven cosas nuevas y diferentes en el mundo de la investigación, incluso observando con instrumentos y en lugares ya conocidos.

Un ejemplo notorio es el de la forma en que se percibió la trayectoria de caída de los cuerpos antes y después de los estudios de Galileo. Como nos muestra el historiador de la ciencia Pierre Thuillier en su libro *De Arquímedes a Einstein,* los sabios anteriores a Galileo estaban educados en la física de Aristóteles, según la cual un cuerpo sólo se mueve mientras esté sometido a una fuerza. Por lo tanto cuando se arroja una piedra, o se lanza una flecha, o cuando un cañón dispara un proyectil, el cuerpo se mueve en línea recta por el ímpetu recibido, hasta que éste se agota por la resistencia del aire, momento a partir del cual cae verticalmente hacia el suelo, sitio en el que le corresponde estar según el orden natural. Es debido a eso que los grabados de manuales de artillería escritos por los expertos alrededor del año 1550 muestran trayectorias en forma de una L invertida.

Podría suponerse que un experto en artillería debe haber observado alguna vez cómo caen una piedra o una flecha dis-

paradas hacia un blanco, o la forma que tienen los chorros de agua o de vino vertidos desde un cántaro. Pero justo después de la difusión de las enseñanzas de Galileo, quien demostró que estas trayectorias tienen la forma de una curva parabólica, se comenzó a representar correctamente la caída de proyectiles, chorros de agua, etcétera. ¡Es como si los proyectiles, que antes de Galileo caían en línea vertical, pasaran ahora a moverse siguiendo una curva!

De modo similar, un investigador de la talla de Leonardo da Vinci, apasionado observador de la naturaleza, hizo dibujos de lo que veía en las disecciones de cadáveres de animales y seres humanos. Pero cuando dibujó el corazón, lo representó con dos ventrículos y una aurícula, porque lo veía así, imbuido de lo que al respecto enseñaba Galeno, máxima autoridad médica de esa época.

En este siglo ocurre algo parecido, con un cambio de paradigma que comienza con la aparición de las físicas cuántica y relativista, y que continúa con la transformación que implica el interés actual por los fenómenos no lineales.

Hasta el siglo pasado, sólo se estudiaban los fenómenos que obedecían a ecuaciones integrables, en particular las lineales. Si había interés por un fenómeno no lineal, se le transformaba mediante una aproximación lineal. Parecía que en la naturaleza lo realmente importante era la familia de los fenómenos lineales y que los otros eran una excepción, una rara especie indeseable por la dificultad de su tratamiento. Testigo de esto son los libros de física y de matemáticas escritos hasta hace unas pocas décadas, donde los sistemas no lineales apenas se mencionan.

Ahora, en cambio, se percibe que la inmensa mayoría de los fenómenos naturales son no lineales, y que los otros son la excepción y no la regla. Si bien hay todavía mucha física de significación que puede hacerse en fenómenos lineales, cada vez más instituciones y científicos se dedican a la dinámica de procesos no lineales. Antes no había fenómenos no lineales dignos de estudio, y ahora forman legión. Una vez más se comprueba que la percepción de lo que cada uno tiene ante sí está condicionada por sus teorías y creencias acerca del mundo, hasta un nivel muchas veces insospechado.

Como hemos visto, la incorporación del tema del caos impli-

ca un cambio de enfoque, una visión diferente a la que fue común a los científicos hasta principios de este siglo: ya no se considera válido un determinismo "absoluto" como el que tan claramente formulara Laplace, y se acepta entonces que sistemas que obedecen a leyes deterministas pueden tener un comportamiento imprevisible, lo que hace inevitable su descripción mediante las probabilidades, y además que esto es válido para la mayoría de ellos, incluyendo casos tan aparentemente simples como el del movimiento de todo objeto que esté sometido a la acción de más de dos fuerzas.

Por lo tanto, el estudio del caos ha revelado que la imprevisibilidad de este complejo mundo se puede conciliar con la existencia de leyes naturales simples y ordenadas.

Las matemáticas correspondientes a este campo también requieren un enfoque diferente, ya que la fundamental aplicación de la computadora permite visualizar, mediante imágenes que muchas veces son de una rara belleza, el comportamiento global, cualitativo, de las ecuaciones de los sistemas caóticos. También aquí se ve cómo ecuaciones muy simples, aplicadas por iteración, y con las características de la autosimilitud, dan origen a formas fractales asombrosamente semejantes a las que aparecen en la naturaleza: árboles, montañas, nubes, que jamás se soñó que pudieran representarse matemáticamente.

Las matemáticas de los sistemas dinámicos caóticos son no lineales, y esto, debido a la consiguiente sensibilidad a las condiciones iniciales, implica que, a diferencia de los que obedecen a ecuaciones integrables, sólo se puede conocer el comportamiento global de estos sistemas. El ejemplo del estudio de Poincaré del movimiento de los planetas nos lo muestra: el único sistema integrable, lineal, es el estudiado por Kepler, o sea el que forman el Sol y la Tierra. Para lograr aproximarlo a un sistema lineal se excluyeron los otros ocho cuerpos que integran el sistema solar. De esta manera se puede obtener la trayectoria elíptica de nuestro planeta, pero si se quiere predecir a largo tiempo su posición con un mínimo de exactitud hay que agregar la Luna, que influye sobre el movimiento terrestre, los demás planetas, y las interacciones gravitatorias entre éstos, lo que nos da un sistema no integrable, caótico, y donde aun los cometas que vienen desde los confines del sistema, o desaparecen por diversos motivos, pueden, merced a la extre-

ma sensibilidad a las perturbaciones, alterar a todo el conjunto. De modo que no es posible analizarlo como se hace con el sistema lineal, por separación de los factores que afectan el comportamiento de aquellos que prácticamente no lo hacen: todo factor, por ínfimo que parezca inicialmente, puede desencadenar un cambio drástico del conjunto completo.

En duraciones cortas, como son los miles de años de nuestros registros históricos en este ejemplo, vale la aproximación lineal para los cálculos, pero cuanto más se desee explorar el futuro tanto más se deberá tener en cuenta el funcionamiento global del sistema.

BIBLIOGRAFÍA

Bergé, P., Y. Pomeau y Ch. Vidal, *L'ordre Dans Le Chaos,* París, Hermann, 1985.

Borman, S., "Researchers Find Order, Beauty in Chaotic Chemical Systems", en: *Chemical & Engineering News,* enero 1991, pp. 18-29.

Dewdney, A. K., "Computer Recreations", en: *Scientific American,* julio de 1985, pp. 16-32.

Ditto, W. L., y L. M. Pecora, "Mastering Chaos", en: *Scientific American,* agosto de 1993, pp. 78-84.

Ekeland, I., *Al Azar,* Barcelona, Gedisa, 1992.

Epstein, I. *et al.,* "Oscillating Chemical Reactions", en: *Scientific American,* marzo de 1983, pp. 96-108.

Gleick, J., *Chaos,* Cardinal Books, 1991.

Hall, N. (comp.), *The New Scientist Guide To Chaos,* Londres, Penguin Books, 1992.

Kuhn, T. S., *La estructura de las revoluciones científicas,* México, Fondo de Cultura Económica, 1982.

Mandelbrot, B., *Los objetos fractales,* Barcelona, Tusquets, 1987.

May, R. M., "Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos", en: *Science,* vol. 186, pp. 645-647.

———, "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics", en: *Nature,* vol. 261, pp. 459-467.

Newton, I., *Principios matemáticos de la filosofía natural,* Madrid, Tecnos, 1987.

Nicolis, C., "Is There a Climatic Atractor?", en: *Nature,* vol. 311, pp. 529-532.

Pagels, H. R., *The Dreams of Reason,* Bantam, 1988. Versión en español: *Sueños de la razón,* Barcelona, Gedisa, 1991.

Peitgen, H. O., y P. Richter, *The Beauty of Fractals,* Berlín, Springer, 1986.
Platón, "Timeo o de la Naturaleza", en *Diálogos,* México, Porrúa, 1989.
Prigogine, I., *From Being to Becoming,* Nueva York, W. H. Freeman and Co., 1980.
———, "La Thermodynarnique de la Vie", en: *La Recherche,* núm. 24, pp. 547-552.
Ruelle, D., *Chance And Chaos,* Londres, Penguin Books, 1993.
———, "Les Atracteurs Étranges", en: *La Recherche,* vol. 11, núm. 108, pp. 132-144.
Schroeder, M., *Fractals, Chaos, Power Laws,* Nueva York, W. H. Freeman and Co., 1991.
Stewart, I., *Does God Play Dice?,* Cambridge, B. Blackwell, 1991. Versión en español: *¿Juega Dios a los dados?,* Barcelona, Crítica, 1991.
Sussman, G. J., y J. Wisdom, "Chaotic Evolution of the Solar System", en: *Science,* vol. 257, pp. 56-62.
Thuillier, P., *De Arquímedes a Einstein,* Madrid, Alianza, 1990.
Vidal, CH., "Les Ondes Chimiques", en: *La Recherche,* núm. 216, pp. 147-148.
Wagensberg, J., *Ideas sobre la complejidad del mundo,* Barcelona, Tusquets, 1989.
Winfree, A. T., y S. H. Strogatz, "Organizing Centres for Three-dimensional Chemical Waves", en: *Nature,* vol. 311, pp. 611-614.
"La Science du Desordre", número especial de *La Recherche,* vol. 22, mayo 1991.

GLOSARIO

Abscisa: la coordenada horizontal de un punto en un sistema de coordenadas rectangular plano.

Amplitud: en una onda, el valor absoluto del máximo desplazamiento a partir del valor cero durante un periodo de oscilación.

Análisis de Fourier: análisis de una curva periódica, a la que se descompone en curvas periódicas elementales (senos y cosenos).

Atractor: región del espacio de las fases de los sistemas disipativos hacia la cual convergen las trayectorias que parten de una determinada región, llamada cuenca del atractor. Los atractores "predecibles", de estructura simple, son el punto y el ciclo límite, que corresponden a comportamientos periódicos y, por lo tanto, se representan con curvas cerrradas.

Bifurcación: todo valor de un parámetro para el que se produce el cambio del número o de la estabilidad de estados y ciclos estables. Se dice entonces que el sistema dinámico pasa por una bifurcación.

Bit: un dígito en la representación binaria de un número. Por ejemplo 0110 es un número de cuatro bits. Es la unidad fundamental de información.

Byte: ocho dígitos binarios o *bits*.

Caos determinista: comportamiento irregular de un sistema dinámico cuando exhibe una gran sensibilidad a las condiciones iniciales, por lo que es un sistema no integrable. Las trayectorias en el espacio de las fases que describen su comportamiento son en general muy complicadas, y se mantienen en una región del mismo, sin crecer ilimitadamente. Para que haya caos determinista, el espacio de las fases debe tener un mínimo de tres dimensiones.

Ciclo: el ciclo describe movimientos periódicos que se pueden predecir, como las órbitas circulares. En el espacio de las fases, se representa mediante curvas cerradas.

Ecuación lineal: para estas ecuaciones vale el principio de superposición de las soluciones. Si u_1 y u_2 son soluciones de una ecuación lineal, toda combinación lineal de éstas, tal como $u = au_1 + bu_2$, donde los coeficientes a y b son constantes, es también una solución.

Ecuación logística: la ecuación no lineal $X_n = KX_n(1 - X_n)$, que se aplica, entre otras ciencias, en la biología como modelo de predicción del crecimiento de una población.

Ecuación no lineal: ecuaciones en las que no vale el principio de superposición de las soluciones. La respuesta de un sistema no lineal puede ser sumamente sensible a las condiciones iniciales.

Ecuaciones diferenciales: ecuación que, en general, tiene la forma:

$$dx_i / dt = f_i(x)$$

donde $x_i(t)$ representa la variable i y la función $f(x)$ da la evolución de $x(t)$ con el tiempo. Los modelos matemáticos en las ciencias físicas se formulan a menudo como ecuaciones diferenciales.

Espacio de las fases: espacio matemático constituido por las variables que describen al sistema dinámico. Cada punto del espacio de las fases representa un posible estado del sistema. La evolución en el tiempo del sistema se representa con una trayectoria en el espacio de las fases.

Exponente de Lyapunov: una cantidad utilizada para caracterizar la divergencia de las trayectorias con el transcurso del tiempo en un proceso caótico.

Fractales: conjuntos de puntos, o curvas, que exhiben una estructura cada vez más detallada a medida que se les observa con mayor amplificación. Muchos fractales son autosímiles, es decir, que la figura tiene un aspecto similar en cada escala de amplificación. Los fractales pueden tener una "dimensión fractal" no entera.

Función analítica: una función que es diferenciable en la vecindad de cada uno de sus puntos.

Grado de libertad: variable independiente en un sistema dinámico.

Iteración: repetición de una operación o conjunto de operaciones matemáticas.

Notación binaria: la notación binaria es la representación de los números enteros en términos de potencias de 2.

Número complejo: un número conteniendo una parte real y otra imaginaria, y de la forma $A + Bi$, donde $i = \sqrt{-1}$.

Número irracional: un número real que es no es racional, o sea que

no es el cociente de dos números enteros. La mayoría de los número reales son irracionales, lo que fue precisado por G. Cantor.

Oscilación armónica: una oscilación cuya frecuencia es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental.

Periodo: duración del ciclo completo en una oscilación.

Realimentación: cuando una parte de la salida de un sistema retorna a la entrada del mismo.

Resonancia: una oscilación de gran amplitud causada por un estímulo periódico relativamente pequeño.

Sección de Poincaré: una sección de Poincaré es la intersección de las trayectorias de un sistema dinámico en el espacio de las fases con una figura de una dimensión menor que la de este espacio. Así, para un espacio de tres dimensiones la sección es un plano.

Sistemas dinámicos: sistemas en los que determinados parámetros evolucionan con el transcurso del tiempo. Se les describe matemáticamente mediante la representación en el espacio de las fases de los estados posibles del sistema, y mediante las reglas de su evolución en el tiempo. Si la evolución de sus variables es continua, la descripción se hace mediante ecuaciones diferenciales.

Sistemas dinámicos conservativos: en la mecánica, los sistemas dinámicos conservativos, también llamados sistemas hamiltonianos, mantienen constante su energía. El volumen que los representa en el espacio de las fases se mantiene constante con el tiempo.

Sistemas dinámicos disipativos: sistemas en los que la energía no se conserva, debido a pérdidas por fricción u otras causas. El volumen que los representa en el espacio de las fases disminuye con el tiempo.

Sistemas dinámicos integrables: sistemas dinámicos con comportamiento regular, y para los cuales, por lo tanto, la representación del comportamiento en el espacio de las fases puede hacerse mediante trayectorias sobre la superficie de un toro n-dimensional.

Sistemas dinámicos no integrables: son los que se describen mediante ecuaciones diferenciales no integrables. En general, su comportamiento en el espacio de las fases se representa mediante trayectorias caóticas.

Trayectoria: una secuencia de puntos en el que cada punto genera al siguiente de acuerdo con una función matemática.

Trayectoria caótica: una trayectoria caótica en el espacio de las fases tiene tres características: *1)* se mantiene en una zona limitada de dicho espacio; *2)* no se estabiliza pues no pasa a un régimen periódico; *3)* tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

Este libro se terminó de imprimir y encuadernar en el mes de agosto de 1999 en los talleres de Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. (IEPSA), calzada de San Lorenzo 244, 09830 México, D.F.

Se tiraron 10 000 ejemplares.

Tipografía y formación:
José Luis Acosta
del Taller de Composición
del Fondo de Cultura Económica.
Se usaron tipos New Baskerville de 14:16,
11:12 y 9:11.

Corrección: *Jimena Gallardo.*
Dibujos: *Sergio Bourguet.*
Cuidado editorial: *Osvelia Molina.*

Fotomecánica: *Fotolito Marján.*

La Ciencia para Todos
es una colección coordinada editorialmente
por MARCO ANTONIO PULIDO
y MARÍA DEL CARMEN FARÍAS.



Entre el orden y el caos: la complejidad. El Universo, la Tierra, el ser humano... surgieron de un estado inicial de desorden o caos, así lo imaginaron las antiguas cosmologías, y también la Biblia: "la Tierra estaba informe y vacía, y había oscuridad sobre la haz del abismo, y el Espíritu de Dios se cernía sobre la haz de las aguas", para establecer el orden.

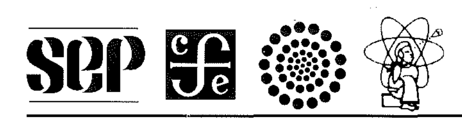
A lo largo de milenios el hombre ha ido descubriendo, a través del razonamiento científico, que detrás del aparente desorden o complejidad de la naturaleza existen comportamientos iterativos —que se repiten— ordenados y regulares, que se pueden registrar, predecir, cambiar y explotar, esto es, son dinámicos. Como señala Galileo: "el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático."

En esta obra el autor describe el lenguaje característico —ecuaciones no lineales— de estos sistemas, llamados caóticos —que están entre el orden en el que nada cambia y el estado de total desorden—, así como los diversos métodos que se utilizan para estudiar su comportamiento. Esta nueva línea de investigación en el campo de las matemáticas, que se inició hace apenas tres décadas, "el estudio del caos", emplea un enfoque diferente. Utilizando las leyes conocidas de la física y con la ayuda fundamental de la computadora analiza, por ejemplo, cómo aplicando la iteración y autosimilitud a ecuaciones simples, es decir a través de una representación matemática, se originan bellas formas fractales, como árboles, montañas, nubes, etc., muy semejantes a las que vemos en la naturaleza.

La complejidad constituye, pues, el nuevo desafío para la ciencia. En este campo, investigaciones matemáticas actuales se están aplicando también para explicar fenómenos en los procesos fisiológicos y neurobiológicos rítmicos, como las arritmias del corazón, y en las ciencias sociales, como los mercados financieros.

Moisés José Sametband fue físico investigador de la Comisión Nacional de Energía Atómica de Argentina.

Diseño de portada: Sergio Bourguet





SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
FONDO DE CULTURA ECONÓMICA
CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA